**ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ ЗНАНИЙ
ЧОУ ВПО «ИСГЗ»**

0073.06.01

Богомолова О.И.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
для студентов экономического факультета

2-е издание, пересмотренное

Казань

ЮНИВЕРСУМ

2016

УДК 512
ББК 22.143
Б744

Утверждено решением Учебно-методического совета ИСГЗ (протокол №1 заседания УМС ИСГЗ от 01.10.2015).

Рецензенты:
Зуев В.И. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики, Зеленодольского филиала Казанского (Приволжского) государственного университета
Шакирзянов А.З. — кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной информатики и математики ЧОУ ВПО «ИСГЗ»

Богомолова О.И.
Б744 Линейная алгебра: Учебно-методический комплекс для студентов экономического факультета / Богомолова О.И. — 2-е изд., пересмотр. — Казань: Юниверсум, 2016. — 70 с.
ISBN 978-5-9991-0367-3

Учебно-методический комплекс (УМК) «Линейная алгебра» разработан для студентов дистанционного обучения в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом, основной образовательной программы по направлению подготовки 080100.62 Экономика, учебным планом ЧОУ ВПО «ИСГЗ».

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» включена в базовую часть математического и естественнонаучного циклов, профиля «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» и профиля «Финансы и кредит».

Разработанный УМК имеет цель оказать помощь в организации работы студента во время сессии и межсессионный период.

Общий объем курса по учебному плану 6 (zet) 216 (часов).

Квалификация (степень) выпускника — бакалавр, нормативный срок освоения программы по заочной форме обучения составляет 4 года, в т.ч. на базе профильного СПО — 3 года; по заочной форме — 5 лет, в т.ч. на базе профильного СПО — 4 года, на базе ВПО — 3 года.

УДК 512
ББК 22.143

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вашему вниманию предлагается учебно-методический комплекс, который поможет Вам правильно и хорошо понять все материалы данного предмета. С его помощью Вам удастся максимально легко изучить дисциплину.

В этом учебно-методическом комплексе Вы найдете учебное пособие, в котором подробно и понятно представлен весь курс занятий, поделенный для Вас по темам, чтобы Вы смогли ознакомиться с содержанием дисциплины.

Затем следуют методические и дидактические материалы по темам для самостоятельной работы, то есть в данном разделе Вам очень понятно объясняется как, каким образом нужно выполнять те или иные задания, от чего и к чему двигаться в освоении этого предмета, чтобы полностью освоить его.

Вслед за этим размещены примерные тестовые задания. Они даны Вам, чтобы Вы смогли проверить себя, после того, как прошли все пункты обучения по программе данной дисциплины, оценить свои знания, увидеть слабые места, чтобы еще раз проработать вопросы и быть уверенным в том, что Вы правильно и качественно усвоили материалы курса.

Успехов Вам в обучении!

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ИЗУЧАЕМОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Исходя из главной цели подготовки бакалавров в области экономики, **целью** преподавания дисциплины «Линейная алгебра» является базовая теоретическая подготовка к деятельности экономиста в государственных, муниципальных, коммерческих и не коммерческих организациях.

Задачи:

– изучить инструменты алгебры и геометрии;

– изучить основные подходы и методы принятия управленческих решений;

– решать типовые математические задачи, используемые при принятии решений;

– использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей;

– обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные.

Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)

Общий объем курса по учебному плану 6 (zet) 216 (часов).

Общекультурные компетенции (ОК):

– владеет основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, имеет навыки работы с компьютером как средством управления информацией, способен работать с информацией в глобальных компьютерных сетях(ОК-13).

Профессиональные компетенции (ПК):

– для решения коммуникативных задач использует современные технические средства и информационные технологии ПК-12);

– для решения аналитических и исследовательских задач использует современные технические средства и информационные технологии (ПК-10).

В результате изучения дисциплины **студент должен:**

знать:

– основные определения и термины математики;

– основные методы статистического анализа;

– инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;

уметь:

– решать типовые задачи;

– давать оценку результатам;

– производить приближенные вычисления;

– выбирать оптимальный метод решения;

выработать навыки:

– решения задач;

– решения систем уравнений;

– определения погрешности вычислений.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ (ТЕМ) ДИСЦИПЛИНЫ

Линейная алгебра

Тема 1. Матрица. Обратная матрица

1.1. Определение матрицы.
1.2. Элементы матрицы.
1.3. Квадратная матрица, диагональная матрица, единичная матрица.

Тема 2. Сложение, умножение матриц

2.1. Сумма матриц.
2.2. Произведение матриц.

Тема 3. Определитель матрицы

3.1. Определение определителя матрицы.
3.2. Определение минора матрицы.
3.3. Свойства определителя матрицы.

Тема 4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

4.1. Определение системы линейных алгебраических уравнений.
4.2. Матричная форма системы линейных алгебраических уравнений.
4.3. Формулы Крамера.

Тема 5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

5.1. Приведение к ступенчатому виду.
5.2. Определение неизвестных из ступенчатой системы.

Тема 6. Векторы на плоскости и в пространстве

6.1. Определение вектора.
6.2. Сложение векторов и умножение вектора на число.
6.3. Свойства линейных операций с векторами.
6.4. Скалярное произведение векторов.
6.5. Векторное произведение векторов.

Тема 7. Прямая линия на плоскости. Системы координат на плоскости: декартовы и полярные координаты

7.1. Декартова система координат.
7.2. Координатами точки.
7.3. Прямая на плоскости.

Тема 8. Кривые второго порядка

8.1. Уравнение второго порядка.
8.2. Эллипс.
8.3. Парабола.
8.4. Гипербола.

Тема 9. Плоскость

9.1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

9.2. Общее уравнение плоскости.

9.3. Расстояние от точки до плоскости.

Тема 10. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

10.1. Системы координат в пространстве: декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

10.2. Сфера.

10.3. Эллипсоид.

10.4. Гиперболоид.

Тема 11. Комплексные числа

11.1. Понятие комплексного числа.

11.2. Полярная система координат и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Тема 12. Многочлены

12.1. Многочлены. Основные понятия.

12.2. Действия над многочленами

12.3. Разложение многочленов на множители и решение уравнений.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Тема 1. Матрица. Обратная матрица

Вопросы для обсуждения:

1.1. Определение матрицы.

1.2. Элементы матрицы.

1.3. Квадратная матрица, диагональная матрица, единичная матрица.

1.1. Определение матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2. Элементы матрицы

Числа a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) называются элементами матрицы A. Первый индекс обозначает номер строки, второй — номер столбца, в которых находится данный элемент.

Матрицы можно обозначать также $A = (a_{ij})$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$).

Элементы a_{ii} ($i = 1, \dots, \min\{m, n\}$) называются диагональными, а их совокупность — главной диагональю матрицы A.

Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей-строкой, а матрица размера $m \times 1$ называется матрицей-столбцом.

Пример: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ — симметрическая матрица

1.3. Квадратная матрица, диагональная матрица, единичная матрица

При $m = n$ матрица называется квадратной матрицей порядка n.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется диагональной, если все ее элементы, кроме диагональных, равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$,$i \neq j$.

Пример диагональной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются равными, если они одного и того же размера $m \times n$ и $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$ называется транспонированной по отношению к матрице $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, если $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$ имеем $b_{ij} = a_{ji}$, т.е.

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица обозначается символом A^{T}.

Квадратная матрица A называется симметричной, если $A^{\mathrm{T}} = A$.

Матрица вида: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E$, называется единичной матрицей.

Контрольные вопросы:

1. Какая матрица называется транспонированной?
2. Какие элементы матрицы называются диагональными?
3. Какая матрица называется диагональной?
4. Какая матрица называется квадратной?
5. Какая матрица называется симметричной?

Тема 2. Сложение, умножение матриц

Вопросы для обсуждения:

2.1. Сумма матриц.

2.2. Произведение матриц.

2.3. Транспонирование матриц.

2.1. Сумма (разность) матриц

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Обозначение: $C = A + B = B + A$.

Умножение матрицы на число

Операция умножения матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства: α (A±B) = αA ± αB

A(α±β) = αA ± βA

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.2. Произведение двух матриц

Замечание: Операция умножения матриц определена только для матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй. В противном случае произведение матриц не определено.

Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

обозначение: A·B = C;

Из приведенного определения видно, что каждый элемент матрицы C равен алгебраической сумме произведений элементов *i*-той строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

Отсюда правило:

$$(строка) \times \begin{pmatrix} с \\ т \\ о \\ л \\ б \\ е \\ ц \end{pmatrix}$$

Свойства:

1) Умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких-либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются перестановочными.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

2) Операция перемножения матриц ассоциативна, т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц дистрибутивна по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

2.3. Транспонирование матриц

Определение. Матрицу A^T называют транспонированной матрицей A, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T (т.е. строки матрицы A заменены на столбцы и наоборот)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

Пример: Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и число } \alpha = 2.$$

Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$ATB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot3 + 1\cdot2 \\ 0\cdot1 + 4\cdot3 - 4\cdot2 \\ 3\cdot1 + 1\cdot3 + 2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$ATB + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример: Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведение матриц AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot3) = (2 + 16 + 3) = (21).$$

Пример: Найти произведение матриц

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5) транспонирование

Обратная матрица

Определение: Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица существует только для квадратной матрицы, определитель которой не равен нулю. Такая матрица называется невырожденной.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Рассмотрим на примере, как найти обратную матрицу A^{-1}.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1) Найти определитель матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-15+4) + 3(-3+16) + 1(1-20) = -22 + 39 - 19 = -2 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует.

2) Сформировать матрицу из алгебраических дополнений каждого элемента матрицы.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{если } i+j \text{ — четное число,} \\ -M_{ij}, & \text{если } i+j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & -13 & -19 \\ -8 & -10 & -14 \\ 7 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

3) Транспонируем матрицу из алгебраических дополнений.

$$\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix}.$$

4) Обратная матрица A^{-1} определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

Контрольные вопросы:

1. Дана матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и матрица$B = (b_{ij})$ размера $n \times l$. Как записывается формула элементов матрицы С, если $C = A \cdot B$?

2. Имеются матрицы D[3;2] и A[2;5]. Какова размерность матрицы B, если B=D*A?

3. Имеются матрицы D1[1;12] и A1[12;2]. Какова размерность матрицы B, если B=D1*A1?

4. Имеются матрицы D[4;2] и A[2;5]. Какова размерность матрицы B, если B=D*A?

5. Какая матрица называется единичной матрицей?

Тема 3. Определитель матрицы

Вопросы для обсуждения:

3.1. Определение определителя матрицы.

3.2. Правило вычисления определителей.

3.3. Свойства определителя матрицы.

3.1. Основные понятия

Пусть $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — квадратная матрица порядка n.

Определителем (или детерминантом) матрицы A называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислено по ее элементам. Обозначается определитель матрицы A символами

$$\det A,\ \Delta \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы $n \times n$ называется определителем n-го порядка**.**

3.2. Правило вычисления определителей

1. Определителем матрицы 1×1, состоящей из одного числа, будем считать само это число.

2. Определитель матрицы 2×2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Определитель матрицы 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычисляется по правилу Саррюса: приписать к определителю справа два первых столбца, не меняя их порядка, и составить сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, из которой затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов параллельных ей.

Чтобы сформулировать общее правило вычисления определителя, введем понятия дополнительного минора и алгебраического дополнения элемента матрицы:

Дополнительным минором $\mathbf{M_{ij}}$ элемента матрицы n-го порядка a_{ij} (i, $j = 1, \ldots, n$) называется определитель матрицы n-1-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента матрицы n-го порядка a_{ij} (i, $j = 1, \ldots, n$) называется число $(-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} — дополнительный минор.

Определитель матрицы An-го порядка может быть вычислен по любой из формул:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \; (i = 1, \ldots, n)$$

разложение по i-ой строке или

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \; (j = 1, \ldots, n)$$

разложение по j-ому столбцу.

3.3. Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы величина ее определителя не меняется, т.е. $\det A^T = \det A$.
2. Отсюда следует, что любое утверждение, справедливое для столбцов определителя, справедливо также и для строк.
3. При перестановке двух столбцов (или строк) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
4. Если матрица имеет два одинаковых столбца (или две одинаковые строки), то ее определитель равен нулю.
5. Если все элементы какого-нибудь столбца (или строки) матрицы умножить на одно и то же число, то ее определитель умножится на это число.
6. Если матрица содержит столбец (строку), состоящую из нулей, то ее определитель равен нулю.
7. Если элементы какого-нибудь столбца (строки) матрицы представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы можно представить в виде суммы двух определителей.
8. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
9. Если к элементам какого-нибудь столбца (строки) матрицы прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится.
10. Сумма произведений элементов любого столбца (строки) матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

Контрольные вопросы:

1. Как обозначается определитель матрицы?
2. Как вычисляется определитель матрицы 2×2?
3. Как вычисляется определитель матрицы 3×3?
4. Что называется дополнительным минором?
5. Какими свойствами обладают определители?

Тема 4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Вопросы для обсуждения:

4.1. Определение системы линейных алгебраических уравнений

4.2. Матричная форма системы линейных алгебраических уравнений

4.3. Формулы Крамера.

4.1. Определение системы линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

где a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ называются коэффициентами системы, b_i — свободными членами, x_n — неизвестные.

Систему (1) можно записать в матричной форме

$$A \cdot X = B.$$

A — матрица коэффициентов системы, называемая основной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ − вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ −вектор-столбец из свободных членов b_i.

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \ldots$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Две системы называются эквивалентными, если они имеют одно и то же общее решение.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены в системе (1) равны нулю.

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется нулевым или тривиальным.

4.2. Матричная форма системы линейных алгебраических уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется определителем системы. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется невырожденной.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$. (2)

Отыскание решения системы по формуле (2) называется матричным способом решения системы.

Матричное равенство (2) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

4.3. Формулы Крамера

Формулы $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, (i = 1, 2,…, n) называются формулами Крамера.

Контрольные вопросы:

1. Какая система линейных уравнений называется однородной?
2. Какая система уравнений называется совместной?
3. Какая система уравнений называется определенной?
4. Какая система уравнений называется неопределенной?
5. Как записываются формулы Крамера?

Тема 5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Вопросы для обсуждения:

5.1. Приведение к ступенчатому виду.

5.2. Определение неизвестных из ступенчатой системы.

5.1. Приведение к ступенчатому виду

Пусть дана система уравнений (1). Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \quad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k,$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, i =1,2,…,k. Коэффициенты a_{ii} называются главными элементами системы. Если в процессе приведения системы (1) к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида $0 = b_i$, а $b_i \ne 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

5.2. Определение неизвестных из ступенчатой системы

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. В последнем уравнении системы (2) выражаем первое неизвестное $x_к$ через остальные неизвестные $(x_{к+1},\ldots,x_n)$. Затем подставляем значение $x_к$ в предпоследнее уравнение системы и выражаем $x_{к-1}$ через $(x_{к+1},\ldots,x_n)$, затем находим $x_{к-2},\ldots,x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{к+1},\ldots,x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2},\ldots,x_1)$.

На практике удобнее работать не системой (1), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент $\boldsymbol{a_{11}}$ был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $\boldsymbol{a_{11}} \ne 1$).

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Наша цель — с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец — готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \| & \| & \| & \| \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ *&*&*&\bigm|&*\\ *&*&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&*&*&\bigm|&*\\ *&*&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&*&\bigm|&*\\ *&*&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&*\\ *&*&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ *&*&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&*&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&-4&*&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&-4&-2&\bigm|&*\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&-4&-2&\bigm|&-28\end{pmatrix}$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&-4&-2&\bigm|&-28\end{pmatrix}$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\begin{pmatrix}3&2&-5&\bigm|&-1\\ 2&-1&3&\bigm|&13\\ 1&2&-1&\bigm|&9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 2&-1&3&\bigm|&13\\ 3&2&-5&\bigm|&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&-4&-2&\bigm|&-28\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&1&-1&\bigm|&1\\ 0&2&1&\bigm|&14\end{pmatrix}$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&1&-1&\bigm|&1\\ 0&2&1&\bigm|&14\end{pmatrix}$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2:

$$\begin{pmatrix}3&2&-5&\bigm|&-1\\ 2&-1&3&\bigm|&13\\ 1&2&-1&\bigm|&9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 2&-1&3&\bigm|&13\\ 3&2&-5&\bigm|&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&-5&5&\bigm|&-5\\ 0&-4&-2&\bigm|&-28\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&1&-1&\bigm|&1\\ 0&2&1&\bigm|&14\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&1&-1&\bigm|&1\\ 0&0&3&\bigm|&12\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\bigm|&9\\ 0&1&-1&\bigm|&1\\ 0&0&1&\bigm|&4\end{pmatrix}$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно — мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие — причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ \qquad y-z=1 \\ \qquad\quad z=4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу-вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$.

Смотрим на второе уравнение: $y – z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$y – 4 = 1$

$y = 5$

И, наконец, первое уравнение: $x + 2y – z = 9$.

$x + 2 \cdot 5 – 4 = 9$

$x + 6 = 9$

$x = 3$

Ответ: $x = 3$, $y = 5$, $z = 4$.

Для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

Контрольные вопросы:

1. Из каких этапов состоит процесс решения по методу Гаусса?
2. Какие коэффициенты называются главными элементами системы?
3. Каким образом система уравнений приводится к ступенчатому виду?
4. Какое условие говорит о несовместности системы?
5. Какое условие говорит о том, что система имеет единственное решение?

Тема 6. Векторы на плоскости и в пространстве

Вопросы для обсуждения:

6.1. Определение вектора.

6.2. Сложение векторов и умножение вектора на число

6.3. Свойства линейных операций с векторами.

6.4. Скалярное произведение векторов

6.5. Векторное произведение векторов

6.1. Определение вектора

Геометрическим вектором называется направленный отрезок, который можно перемещать параллельно ему самому.

Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$. Векторы обозначаются также строчными латинскими буквами со стрелками, например, $\vec{a}$.

Длиной (или модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между точками A и B. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается символом $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор нулевой длины называется нулевым и обозначается символом $\vec{0}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$, равный по длине вектору $\overrightarrow{AB}$ и противоположно направленный, называется противоположным и обозначается $-\overrightarrow{AB}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется единичным**.** Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{AB}$, называется ортом вектора $\overrightarrow{AB}$.

Векторы, лежащие на параллельных или совпадающих прямых, называются коллинеарными.

Векторы, лежащие в параллельных или совпадающих плоскостях, называются компланарными. Если угол между векторами равен $\pi/2$, то векторы называются ортогональными.

6.2. Сложение векторов и умножение вектора на число

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ с началом в точке A и концом в точке C (правило треугольника) (рис. 1).

Произведением вектора $\vec{a}$ и действительного числа α называется вектор $\alpha\cdot\vec{a}$, модуль которого равен $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha < 0$ (рис. 2).

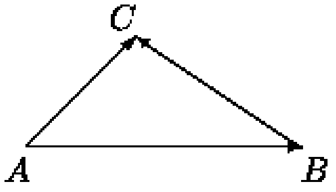


Рис. 1

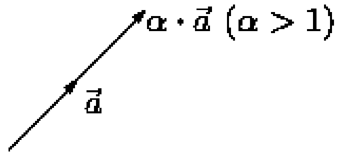


Рис. 2

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями.

6.3. Свойства линейных операций с векторами

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых чисел α, β:

1. $\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ ($\vec{0}$ — нулевой вектор)
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ ($-\vec{a}$ — противоположный вектор);
5. $\alpha(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\beta)\cdot\vec{a}$
6. $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$
7. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$

Условие коллинеарности векторов: два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. существует число $\alpha \neq 0$ такое, что $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b}$.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

6.4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое ($\vec{a},\vec{b}$) и равное произведению их модулей и косинуса угла ϕ между ними, т.е. $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot Cos\phi$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и любых чисел α, β:

1. $(\vec{b},\vec{a})=(\vec{a},\vec{b})$
2. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$
3. $(\alpha\cdot\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$
4. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$

Из определения скалярного произведения следует, что угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ определяется формулой $Cos\phi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (1)

Из формулы (1) следует условие ортогональности векторов: два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Если $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ то

$(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$a_x,a_y,a_z;b_x,b_y,b_z$ — координаты перемножаемых векторов;

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты координатных осей.

6.5. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора *a* на вектор *b* называется вектор, обозначаемый символом *[a b]* и определяемый следующими тремя условиями:

1) модуль вектора *[a b]* равен *[a] [b]* sin φ, где φ — угол между векторами *a* и *b*;

2) вектор *[ab]* перпендикулярен к каждому из векторов *a* и *b*;

3) направление вектора *[ab]* соответствует «правилу правой руки». Это означает, что если векторы *a, b* и *[ab]* приведены к общему началу, то вектор *[ab]* должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (т.е. по вектору *a*), а указательный — по второму (т.е. по вектору *b*).

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей, именно:

$$[ab] = —[ba].$$

Модуль векторного произведения *[ab]* равен площади S параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b: [[ab]] = S.*

Само векторное произведение может быть выражено формулой *[ab] = Se,* где *e* — орт векторного произведения.

Векторное произведение *[ab]* обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы *a* и *b* коллинеарны. В частности, *[aa] = 0.*

Если система координатных осей правая и векторы *a* и *b* заданы в этой системе своими координатами:

$$A = \{X_{1:}; Y_1; Z_1\},\ b = \{X_{2:}; Y_2; Z_2\},$$

то векторное произведение вектора *a* на вектор *b* определяется формулой

$$[ab] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right., \quad [ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1. Что такое вектор?
2. Что такое длина вектора?
3. Какой вектор называется единичным?
4. Какие вектора называются ортогональными?
5. Как находится угол между векторами?

Тема 7. Прямая линия на плоскости.
Системы координат на плоскости: декартовы и полярные координаты

Вопросы для обсуждения:

7.1.Декартова система координат.

7.2.Координаты точки.

7.3.Прямая на плоскости.

7.1. Декартова система координат

Декартова система координат на плоскости определяется некоторой ее точкой *O* и базисом из двух векторов, параллельных плоскости. Точка *O* называется началом координат. Прямые, проведенные через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Они лежат в плоскости и называются осями абсцисс и ординат. Каждая ось координат является числовой осью с началом в точке *O*, положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора.

7.2. Координаты точки

Координатами точки М называются координаты вектора *OM* (радиус-вектора) (рис. 1).

Если базис ортонормированный, то связанная с ним декартова система координат называется прямоугольной.

На плоскости часто употребляется также полярная система координат (рис. 2).

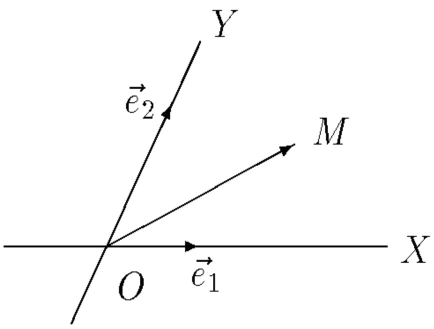


Рис. 1

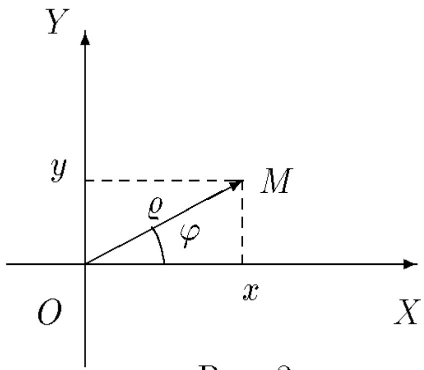


Рис. 2

Она определяется точкой *O*, называемой полюсом, и лучом, исходящим из полюса, называемым полярной осью. Полярными координатами ρ и φ точки *M* называются расстояние ρ от полюса до точки *M* (ρ = |*OM*|) и угол φ между полярной осью и вектором *OM* (рис. 2). Угол φ называется полярным углом, измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Полярные координаты точки *O*: ρ = 0, угол φ не определен. У остальных точек ρ > 0 и угол φ определен с точностью до 2π. Обычно полагают $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$.

Если полюс совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а полярная ось — с положительной частью оси абсцисс, то декартовы координаты x и y точки M выражаются через ее полярные координаты ρ и φ формулами $x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$.

Полярные координаты ρ и φ точки M выражаются через ее декартовы координаты x и y формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ Cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ;\ Sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

7.3. Прямая на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1-й степени и, обратно, каждое уравнение 1-й степени определяет прямую.

Уравнение вида $Ax + By + Cz = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ называется общим уравнением прямой.

Угловым коэффициентом k прямой называется число $k = tg\alpha$, где α — угол наклона прямой к оси OX $(0 \leq \alpha < \pi)$.

Уравнение $y = kx + b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом (b — ордината точки пересечения прямой с осью OY).

Уравнение прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется уравнением прямой в отрезках (a — абсцисса точки пересечения прямой с осью OX, b — ордината точки пересечения прямой с осью OY).

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется формулой: $tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$

Условие перпендикулярности прямых: $k_1 k_2 = -1$

Примеры задач

Задача. Под каким углом прямая y = x + 2 пересекает ось Ox?

Решение.

Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом в виде y = kx + b. Сравнивая данное уравнение с уравнением y = kx + b, получаем, что k = 1. Нам известно, что k — угловой коэффициент прямой, т.е. k — это тангенс того угла, который прямая составляет с положительным направлением оси Ox. Этот угол мы обозначим буквой a. У нас k = 1, т.е., следовательно, a = 45.

Контрольные вопросы:

1. Какая система координат называется декартовой?
2. Как находится расстояние между двумя точками?
3. Как записывается уравнение прямой с угловым коэффициентом?
4. Каково условие параллельности прямых?
5. Как находится угол между прямыми?

Тема 8. Кривые второго порядка

Вопросы для обсуждения:

8.1. Уравнение второго порядка
8.2. Эллипс
8.3. Парабола
8.4. Гипербола

8.1. Уравнение второго порядка

Уравнением второго порядка $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ описываются кривые: эллипс, гипербола, парабола.

Эллипс получается, если секущая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса; *гипербола* — если секущая плоскость пересекает обе полости; *парабола* получается, если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса. Этими тремя линиями исчерпываются все линии, определяемые уравнениями второй степени.

8.2. Эллипс

Определение 1. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек *этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

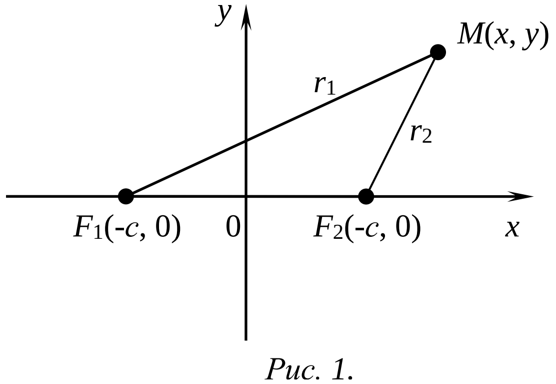


Рис. 1.

Пусть F_1 и F_2 — фокусы. Выберем начало координат в середине отрезка F_1F_2. Ось Ox направим по отрезку F_1F_2, а Oy перпендикулярно вверх. Пусть $2c$ — длина отрезка F_1F_2, если $c = 0$, то F_1 совпадает с F_2 и мы получаем окружность. В этой системе координат фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от фокусов F_1 и F_2 до точки M на эллипсе, а через $2a$ постоянную сумму этих расстояний. Тогда условием того, что точка M принадлежит эллипсу, будет равенство

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Нас будет интересовать случай, когда $2a > 2c$, так как если $2a = 2c$, то эллипс вырождается в отрезок F_1F_2. Найдем значения r_1 и r_2:

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Тогда условие (2) примет следующий вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Перенесем первый корень в правую часть:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2\,.$$

Выразим из последнего равенства корень:

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x+c)^2 - (x-c)^2,$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} - (\cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2}),$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2\,.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как $2a > 2c \geq 0$, то разность $a^2 - c^2 > 0$, обозначим ее через $b^2 = a^2 - c^2$. Последнее равенство примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Разделив на a^2b^2, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Замечание 1. Мы взяли точку на эллипсе и показали, что ее координаты удовлетворяют уравнению (3). Но при возведении в квадрат уравнение могло приобрести лишние корни. Можно проверить, что любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (3), лежит на эллипсе.

При $x = 0$ $y = \pm b$, при $y = 0$ $x = \pm a$.

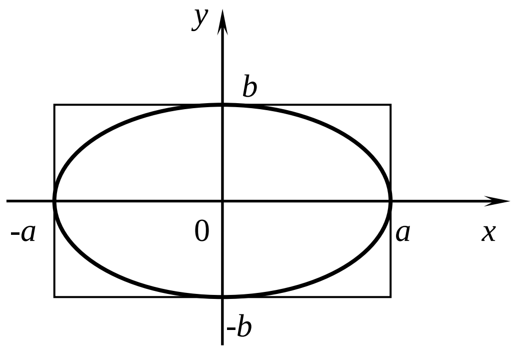


Рис. 2

Определение 2. Величины a и b называют большой и малой полуосями эллипса соответственно.

8.3. Гипербола

Определение 3. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Как и в случае эллипса, обозначим фокусы F_1 и F_2. Расстояние между ними через $2c$, а постоянную абсолютную величину разности расстояний r_1 и r_2 от фокусов до гиперболы через $2a$. Но в этом случае $2a < 2c$, так как разность двух сторон треугольника меньше его третьей стороны. Условием того, что точка M принадлежит гиперболе, будет равенство $|r_1 - r_2| = 2a$.

Или в координатной записи: $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$.

Избавляясь от корней, так же как в случае эллипса, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

При $y = 0$ $x = \pm a$, а при $x = 0$ $y = \pm ib$, то есть оси Oy гипербола не пересекает.

Определение 4. Величина a называется действительной полуосью гиперболы, а b — мнимой.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ являются асимптотами гиперболы, то есть такими прямыми, что расстояние от гиперболы до них стремится к нулю, при возрастании x.

Если в уравнении (5) справа стоит -1, то есть $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, то, переписав его в виде $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, мы видим, что координаты как бы меняются местами. Это уравнение сопряженной гиперболы (см. рис. 4 ниже).

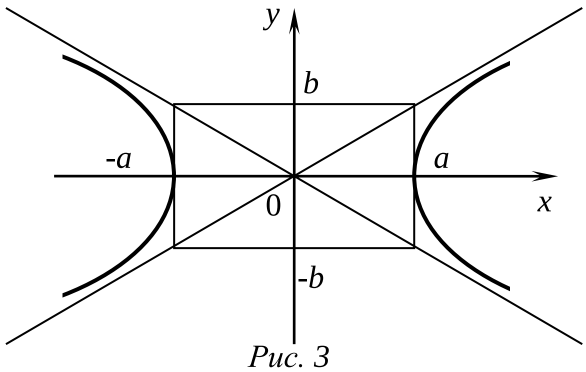


Рис. 3

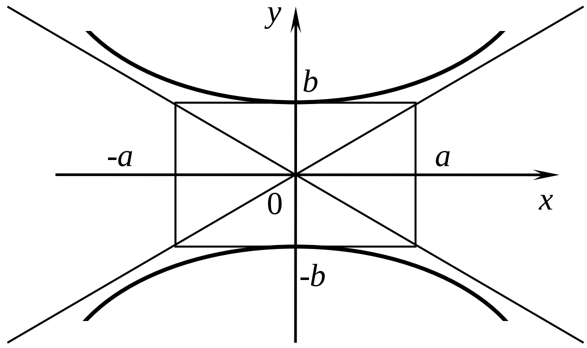


Рис. 4

8.4. Парабола

Определение 5. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости. Указанная точка называется фокусом, а прямая — директрисой параболы.

Мы будем рассматривать случай, когда фокус не лежит на директрисе, иначе, парабола выродилась бы в прямую перпендикулярную директрисе. Обозначим через p расстояние от фокуса F до директрисы. Выберем начало координат в середине отрезка FD, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису. Ось Ox направим по отрезку DF, а ось Oy перпендикулярно вверх. Тогда фокус F будет иметь координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, и расстояние r от фокуса до произвольной точки на плоскости $M(x, y)$ будет равняться $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, а расстояние d от точки $M(x, y)$ до директрисы $d = \frac{p}{2} + x$. Условие принадлежности точки $M(x, y)$ параболе запишется в виде $r = d$.

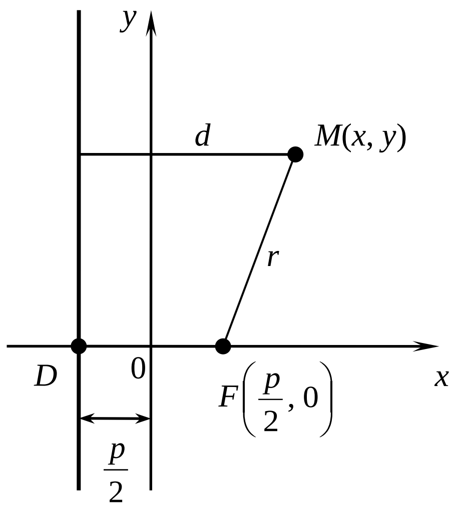


Рис. 5

Или в координатной форме: $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x$.

Избавляясь от корня, получим каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Число p называется параметром параболы. Если $p< 0$, то парабола лежит слева от директрисы (x переходит в $-x$).

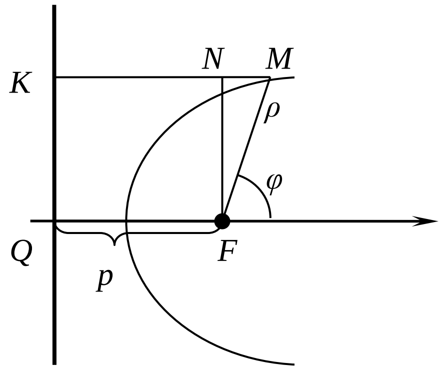


Рис. 6

Для точки параболы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно единице. Для эллипса отличного от окружности и гиперболы можно указать такие прямые, называемые директрисами, что отношение расстояний до фокуса к расстоянию до директрисы, соответствующей фокусу, есть постоянная величина, которую мы обозначим через e. Выберем начало полярной системы координат (ρ, φ) в фокусе F. Обозначим через p расстояние от фокуса до директрисы. Отношение $\frac{|FM|}{|MK|}=e$, $|FM|=\rho$, а $|MK|=p+\rho\cos\varphi$. Отсюда получаем, что $\rho=\frac{pe}{1-e\cos\varphi}$.

Для эллипса $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$, а для параболы $e = 1$. Таким образом, уравнение (8) является уравнением эллипса при $e< 1$ и уравнением параболы при $e = 1$ в полярных координатах. Для гиперболы $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$, но она имеет две ветви, так что ее уравнение в полярных координатах имеет вид:

$$\rho=\begin{cases}\frac{pe}{1-e\cos\varphi}\\ \frac{-pe}{1-e\cos\varphi}\end{cases},\ e>1.$$

Наиболее просто в полярных координатах выглядит уравнение окружности: $\rho = R$.

Уравнения директрис для эллипса и гиперболы имеют вид $x=\pm\frac{a}{e}$. То есть, эллипс директрисы пересекают, а гиперболу — нет.

Контрольные вопросы:

1. Какая кривая называется эллипсом?
2. Какая кривая называется гиперболой?
3. Какая кривая называется параболой?
4. Как записывается уравнение второго порядка?
5. Что такое эксцентриситет?

Тем 9. Плоскость

Вопросы для обсуждения:

9.1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

9.2. Общее уравнение плоскости.

9.3. Расстояние от точки до плоскости.

9.1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат. Сформулируем следующую задачу:

Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку M(x_0, y_0, z_0) перпендикулярно данному вектору $\vec{n}$ = {A, B, C}.

Решение. Пусть P(x, y, z) — произвольная точка пространства. Точка P принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда вектор MP = {$x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$} ортогонален вектору $\vec{n}$ = {A, B, C} (рис. 1).

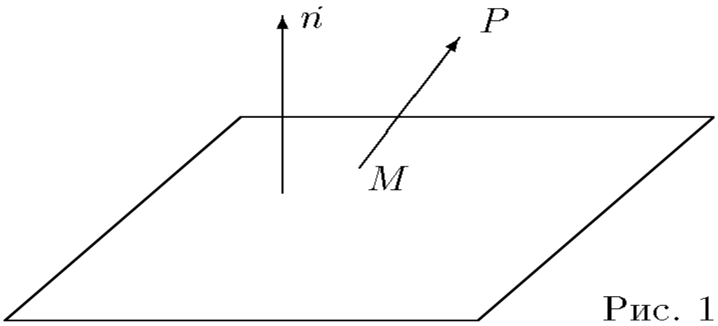


Рис. 1

Написав условие ортогональности этих векторов ($\vec{n}$, MP) = 0 в координатной форме, получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Это и есть искомое уравнение. Вектор $\vec{n}$ = {A, B, C} называется <u>нормальным вектором</u> плоскости.

Таким образом, чтобы написать уравнение плоскости, нужно знать нормальный вектор плоскости и какую-нибудь точку, принадлежащую плоскости.

9.2. Общее уравнение плоскости

Если теперь в уравнении (1) раскрыть скобки и привести подобные члены, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

В трехмерном пространстве в декартовой системе координат любая плоскость описывается уравнением 1-ой степени (линейным уравнением). И обратно, любое линейное уравнение определяет плоскость.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

$Ax + By + Cz = 0$ ($D = 0$) — плоскость проходит через начало координат;

$Ax + By + D = 0$ ($C = 0$) — плоскость параллельна оси Oz (аналогичный смысл имеют уравнения $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$);

$Ax + By = 0$ ($D = C = 0$) — плоскость проходит чрез ось Oz ($Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ — через оси Oy и Ox, соответственно);

$Ax + D = 0$ ($B = D = 0$) — плоскость параллельна плоскости Oyz ($Cz + D = 0$, $By + D = 0$ — параллельно плоскости Oxy и Oxz, соответственно);

$Ax = 0$, т.е. $x = 0$ ($B = C = D = 0$) — плоскость совпадает с плоскостью Oyz ($y = 0$, $z = 0$ — уравнения плоскостей Oxz и Oxy, соответственно).

Уравнение плоскости в отрезках: $x/a + y/b + z/c = 1$, где a, b, c — абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения с плоскостью координатных осей Ox, Oy, Oz, соответственно.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

9.3. Расстояние от точки до плоскости

Поставим следующую задачу:

Найти расстояние от точки $P(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение: фиксируем некоторую точку $M(x_1, y_1, z_1)$, , принадлежащую плоскости, и построим вектор MP (см. рис. 1 выше).

Искомое расстояние d равно абсолютной величине проекции вектора MP на нормальный вектор плоскости. Получаем:

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{MP} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \tag{1}$$

В нашем случае:

$$\vec{n} = \{A, B, C\} \text{ и } \overrightarrow{MP} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}.$$

По формуле (1) имеем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Контрольные вопросы:

1. Как записывается уравнение плоскости?
2. Как записывается уравнение плоскости в отрезках?
3. Как находится расстояние от точки до плоскости?
4. Как записывается уравнение плоскости, которая проходит через начало координат?
5. Как записывается уравнение плоскости, которая проходит через ось OZ?

Тема 10. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

Вопросы для обсуждения:

10.1. Системы координат в пространстве: декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

10.2. Сфера, эллипсоид.

10.3. Гиперболоид.

10.1. Системы координат в пространстве: декартовы, цилиндрические и сферические координаты

Декартова система координат в пространстве определяется точкой и базисом из трех векторов. Точка *O* называется началом координат. Прямые, проведенные через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. В трехмерном пространстве они называются осями абсцисс, ординат и аппликат. Оси координат являются числовыми осями с началом в точке *O*, положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора. Координатами точки М называются координаты вектора *OM* (радиус-вектора) (рис. 1). Если базис ортонормированный, то связанная с ним декартова система координат называется прямоугольной.

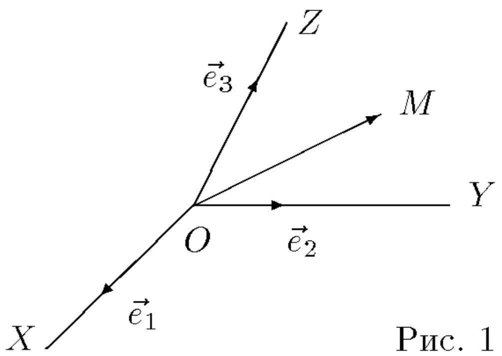


Рис. 1

Поверхностью 2-го порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Цилиндрические и сферические координаты определяются точкой *O*, исходящим из нее лучом ***l*** и единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным ***l*** (рис. 2).

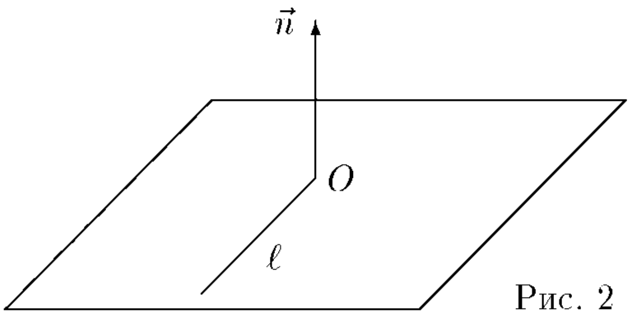


Рис. 2

Проведем через точку O перпендикулярно вектору $\vec{n}$ плоскость P и обозначим проекцию точки M на эту плоскость M'.

В цилиндрических координатах положение точки M определяется числами ρ, φ и z, где ρ и φ — полярные координаты точки M', а z — проекция вектора OM на вектор $\vec{n}$. Пусть точка O совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, луч $\boldsymbol{l}$ — с положительной частью оси абсцисс, а вектор $\vec{n}$ — с положительной частью оси аппликат (рис. 3).

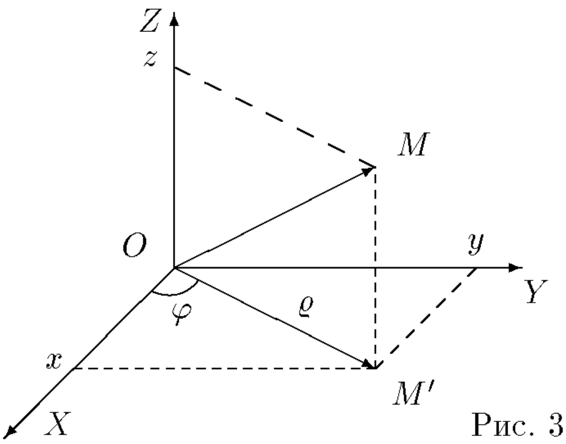


Рис. 3

Декартовы координаты x, y и z точки M выражаются через ее цилиндрические координаты ρ, φ и z по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$.

В <u>сферических координатах</u> положение точки M определяется числами ρ, φ и θ, где $\rho = |OM|$, φ — полярный угол точки M', а θ — угол между векторами $\vec{n}$ и OM. Мы будем отсчитывать угол θ от вектора $\vec{n}$ по направлению к вектору OM . Угол θ принимает значения от 0 до π.

Пусть точка O совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, луч $\boldsymbol{l}$ — с положительной частью оси абсцисс, а вектор $\vec{n}$ — с положительной частью оси аппликат (рис. 4).

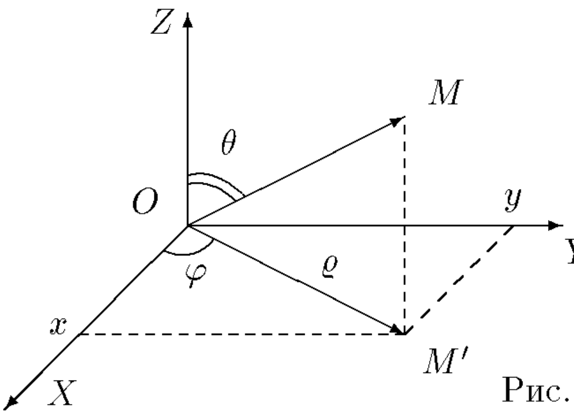


Рис. 4

Декартовы координаты x, y и z точки M выражаются через ее сферические координаты ρ, φ и θ по формулам $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$.

10.2. Сфера, эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c>0 — параметры эллипсоида. Это уравнение называется каноническим уравнением эллипсоида, а система координат, в которой эллипсоид описывается каноническим уравнением, называется канонической.

Из уравнения эллипсоида следует, что поверхность симметрична относительно координатных плоскостей, начало координат является центром эллипсоида (рис. 5).

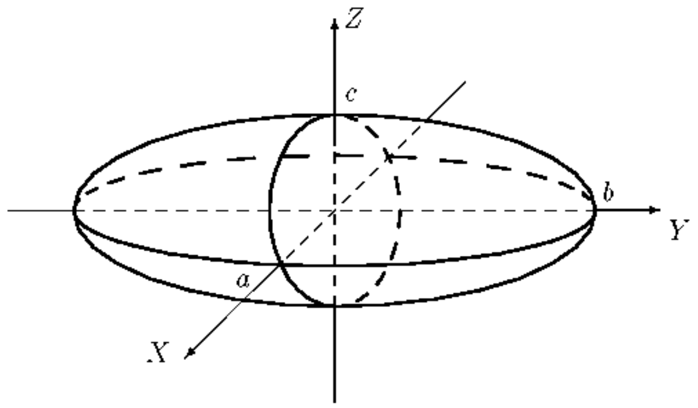


Рис. 5.

В частном случае $a = b = c = R$ имеем уравнение сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

10.3. Гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c > 0 — параметры гиперболоида (его полуоси см. на рис. 6 ниже). Это уравнение называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида, а система координат, в которой гиперболоид описывается каноническим уравнением, называется канонической.

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями z=h являются эллипсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями x = h или y = h являются гиперболами:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \text{ или } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

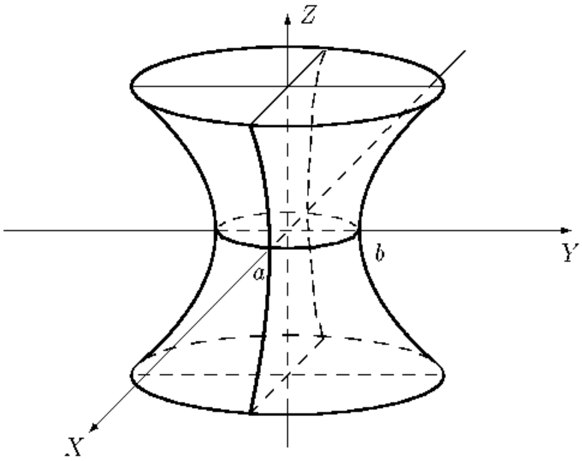


Рис. 6

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением, в котором не фигурирует одна из переменных: $F(x, y) = 0$, $F(x, z) = 0$ или $F(y, z) = 0$.

Свойство цилиндрических поверхностей

Если некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит цилиндрической поверхности, описываемой уравнением $F(x, y) = 0$, то все точки прямой, проходящей через эту точку параллельно оси OZ , также принадлежат цилиндрической поверхности. Такие прямые называются образующими цилиндрической поверхности, а кривая, описываемая уравнением $F(x, y) = 0$ и получающаяся в сечении любой плоскостью $z = h$, называется направляющей. Примеры цилиндрических поверхностей 2-го порядка.

Эллиптический цилиндр (рис. 7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

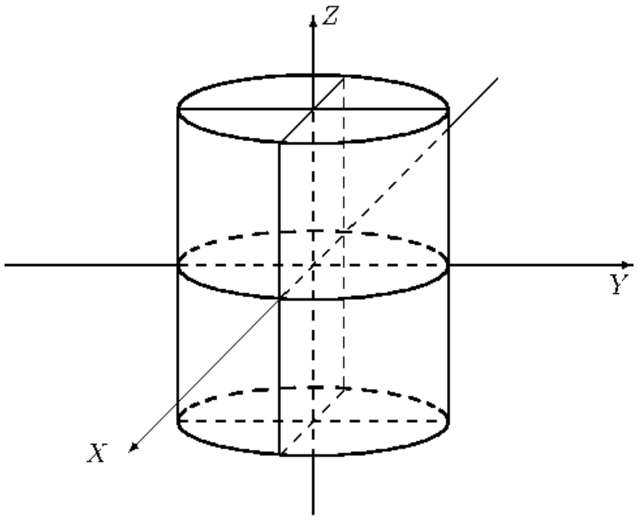


Рис. 7

Если $a = b = R$ то уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ в трехмерном пространстве определяет круглый цилиндр.

Гиперболический цилиндр

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в трехмерном пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ. Направляющей является гипербола с полуосями a и b.

Параболический цилиндр

Уравнение $y^2 = 2px$ ($p > 0$) в трехмерном пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ. Направляющей является парабола (рис. 8).

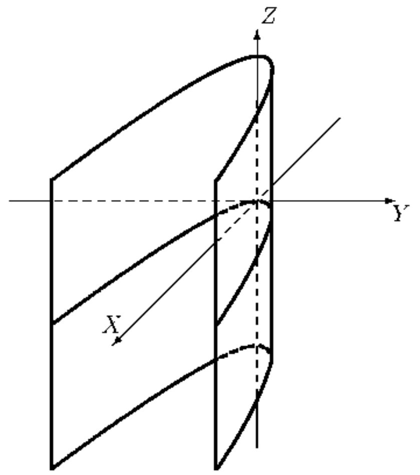


Рис. 8

Контрольные вопросы:

1. Как записывается уравнение сферы?
2. Как называется расстояние от центра сферы до точек ее поверхности?
3. Как записывается уравнение гиперболоида?
4. Как записывается уравнение эллипсоида?
5. Как записывается уравнение гиперболического цилиндра?

Тема 11. Комплексные числа

Вопросы для обсуждения:

11.1. Понятие комплексного числа.

11.2. Полярная система координат и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

11.1. Понятие комплексного числа

До сих пор мы рассматривали лишь действительные числа. С помощью положительных действительных чисел можно выразить результат любого измерения, а с помощью произвольных действительных чисел — измерение любой величины. Арифметические операции над действительными числами (сложени е, вычитание, умножение и деление на число, отличное от нуля) снова дают действительные числа.

Операция же извлечения квадратного корня определена не для всех действительных чисел, а лишь для неотрицательных — из отрицательного числа квадратный корень извлечь нельзя. Поэтому в теории квадратных уравнений приходится рассматривать три случая: если $D = b^2 - 4ac > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, при $D = 0$ оно имеет лишь один действительный корень, а при $D < 0$ это уравнение действительных корней не имеет.

Ряд вопросов, возникших при решении уравнений третьей и четвертой степеней, привел математиков к необходимости расширить множество действительных чисел, присоединив к нему новое число i. Такое, что $i^2 = -1$. Поскольку действительных чисел с таким свойством не существует, новое число назвали «мнимой единицей» — оно не выражало ни результатов измерения величин, ни изменений этих величин. Но включение числа I потребовало дальнейшего расширения множества чисел — пришлось ввести произведения этого числа на все действительные числа, т.е. числа вида bi, где b € R, а также суммы действительных чисел и таких произведений, т.е. числа вида a + bi, где a,b € R Получившие при этом числа назвали комплексными, т.к. они содержат как действительную часть числа a, так и чисто мнимую часть bi.

Комплексными числами называются выражения вида $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — некоторый символ, удовлетворяющий условию $i^2 = -1$. Число a называется действительной частью числа a+bi, а число b — его мнимой частью.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется алгебраической формой этого числа.

Поскольку выражение a + bi напоминает многочлен первой степени от I, математики XVI века производили операции над такими выражениями по тем же правилам, что и над многочленами, причем, когда у них появлялось выражение i^2, его заменяли на –1.

Например, сумму и произведение комплексных чисел определяли следующим образом:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c)+(b + d)i,$$
$$(a+ bi) (c+ di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Частное двух многочленов первой степени не выражается, вообще говоря, в виде многочлена. Но для комплексных чисел частное снова выражается в виде комплексного числа, а именно:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$i^3= i^2*i = (-1)i = -i$

$i^4 = i^3*i=(-i)i=-i^2=-(-1)=1$

$i^5 = i^4*i=1*i=i$

Таким образом,

$I^{4n+k} = (i^4)^n I^k=1^n*I^k= I^k$

Например,
$I^{67}=i^{64+3}=i^{4*16+3}=i^3=-i$

В записи комплексного числа $z = a + bi$ нас интересуют лишь действительные числа a и b, идущие в определенном порядке. Поэтому введем следующее определение:

Комплексным числом z называют пару (a;b) действительных чисел a и b, взятых в определенном порядке. Две пары (a;b) и (c;d) задают одно и то же комплексное число в том и только том случае, когда они совпадают, т.е. когда a = c и b = d.

Приняты обозначения a = Rez, b = Imz французских слов — reele — действительный, imaginaire — мнимый).

Определим для комплексного числа операции сложения и умножения:

Если z=(a;b) и w=(c;d), то

Z+W=(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)

Zw = (a;b)(c;d) = (ac – bd;ad + bc)

Заметим,

1) для пар (a;0) опребделенные выше операции сложения и умножения сводятся к соответствующим операциям над действительными числами, т.е. имеют место равенства

(a;0)+(c;0)=(a+c;0)

(a;0)(c;0)=(ac;0)

2) имеют место равенства

(в;0)(0;1)=(0;в)

(0;1)(0;1)=(-1;0)

Из утверждения 1) следует, что пару (a;0) можно кратко обозначить через *a*. Тогда равенство (0;1)(0;1)=(–1;0) примет вид(0;1)(0;1)= –1.

Наконец, обозначим пару (0;1) через i. Тогда равенство (b;0)(0;1)=(0;b) примет вид bi=(0;b). Поскольку (a;b)=(a;0)+(0;b), то получаем, что пару (a;b) можно обозначить a+bi:(a;b)= a+bi.

Формулы (1) и (2) принимают в этих обозначениях вид

(a+ bi) +(c+ di) =(a + c)+(b + d)i,

(a+ bi) (c+ di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.

Свойства операций сложения и умножения для комплексных чисел такие же, как и для действительных:

Z+w=w+z	Zw=wz
(z+w)+t=z+(w+t)	(zw)t=z(wt)
Z+0=Z	Z*1=z
Z(w+t)=zw+zt	

Каждое комплексное число z имеет противоположное ему число –z:

z= a + bi, –z= –a – bi

В самом деле, $(a + bi)+(–a – bi) = (a – a) + (b – b)i = 0$

Каждое отличное от нуля комплексное число z имеет обратное ему число w такое, что $zw = 1$.

$$W=1/Z=\frac{A}{A^2+B^2}-\frac{B}{A^2+B^2}I$$

Для комплексных чисел верны тождества:

$$(z\pm w)=z^2\pm 2zw+w^2$$

$$(z+w)(z-W)=z^2-w^2$$

Операции вычитания и деления комплексных чисел определены равенствами:

$$z-w=z+(-w)$$

$$\frac{z}{w}=z*\frac{1}{w},$$

где $w\neq 0$

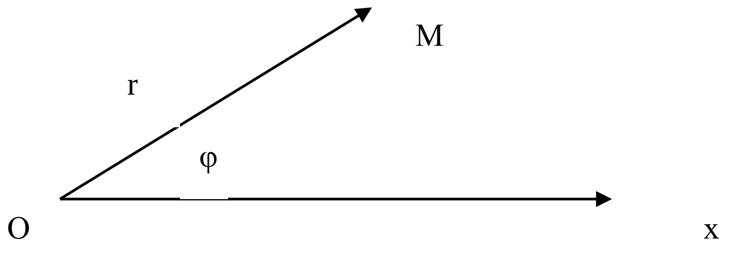
$$(a+ bi) -(c+ di) =(a - c)+(b -d)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-d^2i^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

11.2. Полярная система координат и тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Положение точки на координатной плоскости можно задавать не только ее декартовыми координатами. Можно задать это положение указав расстояние r этой точки M до фиксированной точки O (полюса) и направлением луча OM.

Последнее задается величиной угла φ, образованного лучом OM с фиксированным лучом OX, выходящим из точки O. При этом угол отсчитывают против хода часовой стрелки.



Пару чисел (r;φ) называют полярными координатами точки M.

Таким образом, чтобы задать полярную систему координат нужно задать полюс O, полярный луч OX и выбрать единицу измерения длин и углов. Углы обычно измеряют в радианах.

Мы будем называть число r — длиной радиус-вектора OM, а φ — величиной полярного угла (или полярным углом).

В случае, когда задана декартова система координат и в качестве полюса выбрано начало этой системы координат, а в качестве полярного луча — положительное направление оси абсцисс, тогда выполняются равенства:

$X = r\cos\varphi$ (1)

$Y = r\sin\varphi$ (2)

Отсюда,

$\cos\varphi = x/r$, (3)

$\sin\varphi = y/r$, (4)

$x^2 + y^2 = r^2$ (5)

$\mathrm{tg}\varphi = x/y$ (6)

Пример 1. Найдем полярные координаты точки $M(\sqrt{3};-1)$

Решение.

По формулам (3), (4), (5) имеем

$R= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

$\cos\varphi == \sqrt{3}/2$, $\sin\varphi = -1/2$

По заданным значениям $\cos\varphi == \sqrt{3}/2$, $\sin\varphi = -1/2$ находим, что $\varphi = -\pi/6$

Значит, полярные координаты точки M равны $(2;-\pi/6)$.

Пример 2. Найдем декартовы координаты точки M, если ее полярные координаты равны 4 и $-\pi/4$.

Решение.

По формулам (1), (2) имеем

$X = 4\cos(-\pi/4) = 4*\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$

$У = 4\sin(-\pi/4) = 4*(-\sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2}$

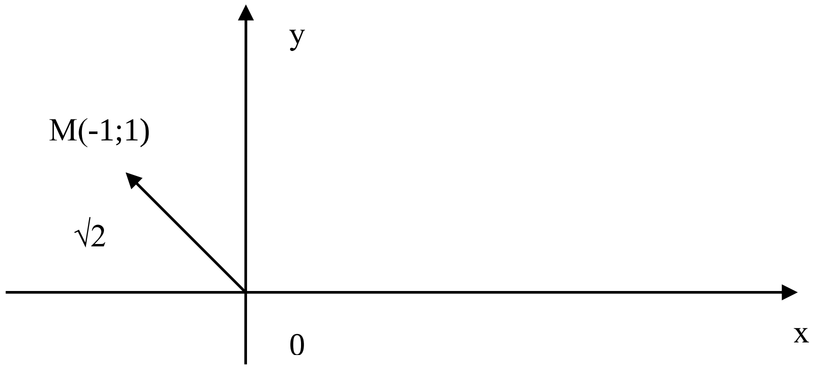
Пример 3. Найдем полярные координаты точки $M(-1;1)$

Решение.

По рисунку (см. ниже) сразу видим, что $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$.

Так как комплексные числа изображаются точками координатной плоскости, их можно задавать не только с помощью декартовых координат, но и с помощью ее полярных координат.

Из формул (1), (2) следует, что если $z = x + yi$, то $Z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Определение. Длина радиус-вектора точки M, изображающей число z называется модулем этого числа, а полярный угол точки M- аргументом или фазой числа z. Модуль числа z обозначают $|z|$, аргумент этого числа обозначают Argz.

Таким образом, в записи $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (7) число r является модулем z, а число φ — аргументом этого числа.

Запись (7) называют тригонометрической формой числа z.

Модуль любого комплексного числа есть неотрицательное действительное число, равное нулю лишь при $z=0$.

Аргумент числа z имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на слагаемые, кратные 2π.

Пример 4. Найдем тригонометрическую запись числа:

А) $\sqrt{3} - i$

Решение.

Имеем $r = 2$, $\varphi = -\pi/6$

Значит,

$\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$

Б) -6

Решение.

Имеем: $r = 6$, $\varphi = \pi$, значит,

$-6 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$

В) $-2(\cos\pi/5 - i\sin\pi/5)$

Решение.

Запись $z = -2(\cos\pi/5 - i\sin\pi/5)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа z, поскольку здесь множитель -2 отрицателен, равно как и знак перед i. Перепишем z в виде $z = 2(-\cos\pi/5 + i\sin\pi/5)$.

Теперь осталось найти такой угол φ, что $\cos\varphi = -\cos\pi/5$, $\sin\varphi = \sin\pi/5$.

Ясно, что $\varphi = 4\pi/5$. Значит, $z=2(\cos 4\pi/5+i\sin 4\pi/5)$.

Контрольные вопросы:

1. Что такое комплексные числа?
2. При каких действительных значениях x и y числа $z_1 = 5 + ixy$ и $z_2 = x + y - 4i$ будут сопряженными?
3. Верно ли, что не существует ни одного комплексного числа, равного квадрату своего сопряженного числа?
4. Что такое «мнимая единица?
5. Какие два комплексных числа называются равными?

Тема 12. Многочлены

Вопросы для обсуждения:

12.1. Многочлены. Основные понятия.

12.2. Действия над многочленами.

12.3. Разложение многочленов на множители и решение уравнений.

12.1. Многочлены. Основные понятия

Алгебраические выражения разделяются на рациональные и иррациональные.

Алгебраическое выражение называется рациональным относительно переменной величины, входящей в это выражение, если над этой величиной производятся действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень.

Примеры рациональных величин

$$2{,}3x^3-2x+3,\ \frac{x^2-2x+6}{x-3},\ x+3-\frac{x^2-3}{x^4-3x-4}$$

Алгебраическое выражение называется иррациональным относительно переменной величины, входящей в это выражение, если оно содержит величину под знаком корня.

Примеры иррациональных величин

$$x+\sqrt{x^2+3\sqrt{2x+1}},\ \frac{\sqrt{y}}{x}-\frac{x}{\sqrt{y}}$$

Рациональные выражения бывают целые и дробные.

Целое рациональное выражение по-другому называется многочленом (полиномом). Многочленом называется рациональное выражение, в котором над переменной величиной производятся только действия сложения, вычитания и умножения.

Примеры многочленов

$x^3+3x^2+3x+1,\ 2x^2y+x\sqrt[5]{y}-5$ (многочлен только относительно x)

Многочлен n-й степени относительно x

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0\neq 0,\ n\geq 0$ целое число, если его расположить по убывающим степеням.

Многочленом нулевой степени является любое не равное нулю число. Число нуль также многочлен только неопределённой степени. Каждый член многочлена называется одночленом. Степень переменной или сумма степеней переменных входящих в одночлен называется степенью одночлена.

Пример одночлена

$ax^ly^k \dots z^m$, a — числовой коэффициент, l, k, m — неотрицательные числа.

$l + k + \dots + m$ — степень одночлена.

Одночлен — частный случай многочлена. Наибольшая из степеней одночленов входящих в многочлен степенью многочлена. Другое определение многочлена. Многочлен — сумма одночленов.

Многочлен вида $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$, $n \geq 0$ — целое число — многочлен от одной переменной.

Многочлен в состав, которого входят одночлены вида $ax^ly^k \dots z^m$, a — числовой коэффициент, l, k, m — неотрицательные числа. $l + k + \dots + m$ — степень одночлена — многочлен от нескольких переменных P(x, y, …z).

Дробным рациональным выражением или алгебраической дробью называется отношение двух многочленов.

Пример алгебраической дроби $\dfrac{x^2y^3z - xyz + xy^2 + 1}{x^4y^3z + x^2y^2 - 5}$

12.2. Действия над многочленами

Определение. Два многочлена P(x) и Q(x) относительно x с любыми действительными коэффициентами будем считать равными P(x) = Q(x) лишь в том случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Значения таких многочленов очевидно равны. Существует утверждение обратное этому: если значения двух многочленов равны при всех значениях x, то такие многочлены равны, их коэффициенты совпадают при одинаковых степенях x.

Многочлены можно складывать. Суммой двух многочленов P(x) и Q(x) называется многочлен, у которого коэффициент при каждой степени x равен сумме коэффициентов при той же степени в многочленах P(x) и Q(x).

Многочлены можно вычитать. Разностью двух многочленов P(x) и Q(x) называется многочлен, у которого коэффициент при каждой степени x равен разности коэффициентов при той же степени в многочленах P(x) и Q(x).

Многочлены можно умножать. Чтобы умножить два многочлена P(x) и Q(x), нужно каждый член многочлена P(x) умножить на каждый член многочлена Q(x) и полученные результаты сложить.

Сложение, умножение и вычитание многочленов — основные арифметические действия над многочленами.

Пусть P(x) = Q(x)S(x), P(x) и Q(x) два многочлена, причем степень многочлена P(x) не меньше степени многочлена Q(x) и, если существует такой многочлен S(x), что выполняется равенство

P(x) = Q(x)S(x), то говорят, что многочлен P(x) делится нацело на многочлен Q(x). P(x), Q(x), S(x) называются соответственно делимое, делитель, частное. Если такого многочлена не существует, то многочлен P(x) не делится на Q(x). В этом случае, как и при рассмотрении деления с числами производится деление с остатком.

Разделить многочлен P(x) на Q(x) с остатком это значит представить многочлен P(x) в виде равенства P(x) = Q(x)S(x) + R(x), где R(x) остаток, причём степень R(x) меньше степени Q(x). При делении многочленов с остатком справедлива следующая теорема.

Для любых двух многочленов P(x) и Q(x) всегда можно найти и притом однозначно два многочлена S(x) и R(x), для которых справедливо равенство P(x) = Q(x)S(x) + R(x).

Деление двух многочленов осуществляется углом. Рассмотрим пример такого деления.

Коэффициенты частного многочлена на двучлен можно искать с использованием определения равенства двух многочленов.

Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$; $Q(x) = x - c$; $S(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Получаем $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x - c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + R$, где R – число т.к. степень R меньше степени x – c. Умножим S(x) на Q(x) и получим $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + (b_1 - c\, b_0)x^{n-1} + \ldots +(b_{n-1} - c\, b_{n-2})x + R - c\, b_{n-1}$

Отсюда получим $b_0 = a_0$; $b_k = cb_{k-1} + a_k$ $(k = 1, 2, 3,\ldots, n)$, $b_n = R$. $R= cb_{n-1} + a_n$

Таким образом, деление на двучлен можно осуществлять, не производя «деления углом», а определять коэффициенты частного по полученным формулам. Подобный способ определения коэффициентов называется схемой Горнера

a_0	a_1	a_2	…	a_n
+	$b_0\, c$	$b_1\, c$	…	$b_{n-1}\, c$
b_0	b_1	b_2		$b_n = R$

Рассмотрим несколько примеров применения схемы Горнера и свойств коэффициентов равных многочленов.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен x – c равен значению многочлена P(x) при x = c.

Определение. Число x_0 называется корнем многочлена P(x), если $P(x_0) = 0$.

Следствие1. Если остаток от деления многочлена P(x) на $Q(x) = x - x_0$ равен нулю, то значение $x = x_0$ есть корень многочлена P(x).

Следствие2. Остаток от деления многочлена P(x) на Q(x) = ax + b равен значению многочлена P(x) при $x = -\frac{b}{a}$.

12.3. Разложение многочленов на множители и решение уравнений

Теорему Безу используют для разложения многочлена на множители.

Определение. Преобразование многочлена к виду произведения двух или нескольких многочленов ненулевой степени называется разложением многочлена на множители. Если многочлен может быть разложен на множители, то он называется приводимым, в противном случае — неприводимым или неразложимым на множители. Многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ приводим на множестве комплексных чисел, но не всегда приводим на множестве действительных или рациональных чисел. Можно рассмотреть такой пример. Многочлен $P(x) = x^2 + 9$ не приводим на множестве действительных чисел, а на множестве комплексных мы получим следующее разложение $x^2 + 9 = (x + 3i)(x - 3i)$. Где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Многочлен P(x) можно представить в виде $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$. Если произвести умножение двучленов и привести подобные, складывая коэффициенты при одинаковых степенях, то получим многочлен вида: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \dots + (-1)^n x_1x_2\dots x_n)$. По определению равных многочленов сравним коэффициенты при одинаковых степенях многочленов.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

....

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Эти формулы носят название формул Виета. Формулы позволяют по известным корням составить уравнение, которое можно записать в виде $x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} = 0$

Для разложения многочленов на множители полезно знать ещё две теоремы.

Теорема о числе корней многочлена и разложении его на линейные множители. Всякий многочлен, рассматриваемый на множестве комплексных чисел, имеет ровно столько корней, какова его степень, и всегда разлагается на линейные множители вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Теорема о разложении на множители с действительными коэффициентами. Многочлен с действительными коэффициентами всегда разлагается в произведение линейных и квадратичных множителей, коэффициенты которых также действительны.

На основании предшествующих утверждений можно сделать такой вывод, что рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами следует искать среди чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и q — всевозможные делители (как положительные, так и отрицательные!) соответственно свободного члена уравнения и коэффициента при старшей степени. При нахождении одного корня мы можем с помощью схемы Горнера понизить степень многочлена на единицу.

Задачи с использованием свойств многочленов

Задача 1. Найдите значения, которые может принимать произведение действительных различных корней уравнения $x^2 + 4x + (k^2 – 5k + 10) = 0$.

Корни уравнения действительные, когда дискриминант квадратного уравнения неотрицательный.

$D = 16 - 4(k^2 – 5k + 10) \geq 0$, а произведение корней по теореме Виета $x_1x_2 = k^2 – 5k + 10$.

Решим неравенство $16 – 4(k^2 – 5k + 10) \geq 0 \Leftrightarrow k^2 – 5k + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (k – 3)(k – 2) \leq 0 \Leftrightarrow k\in[2; 3]$

Рассмотрим функцию от $kp(k) = x_1x_2 = k^2 – 5k + 10$ и найдём область её значений на области определения $k\in[2; 3]$. Исследуем функцию $p(k) = k^2 – 5k + 10$. Найдём производную $p'(k)=2k – 5$.

$2k – 5 = 0 <=> k = 2,5$ — в этой точке экстремум. Находим на данной области определения $k\in[2; 3]$ наибольшее и наименьшее значения функции.

$p(2) = 4 – 10 + 10 = 4$.

$p(2,5) = 6,25 – 12,5 + 10 = 3,75$

$p(3) = 9 – 15 + 10 = 4$.

Значит $x_1x_2\in[3,75; 4]$.

Задача 2. Ребра x, y, z являются корнями кубического уравнения $x^3 – 9x^2 + 26x – 24 = 0$. Найти объём и полную поверхность параллелепипеда.

Решение. Формулы Виета для кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ будут выглядеть так:

$x_1 + x_2 + x_3 = –p$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$,

$x_1x_2x_3 = –r$.

$x_1= x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Объём параллелепипеда $V = xyz = 24$

Полная поверхность $S = 2(xy + xz + yz) = 2*26 = 52$.

Задача 3. Доказать, что выражение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ есть квадрат трёхчлена.

Из условия $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x^2 + px + q)^2$

Преобразуем левую и правую часть равенства.

$x^4 + (1 + 2 + 3 + 4)x^3 + (12 + 2 + 6 + 3+ 4 + 8)x^2 + (24 + 12 + 8 + 6)x + 25 = x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$

$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 25 = x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$

Из равенства многочленов

$2p = 10$,

$p^2 + 2q = 35$,

$2pq = 40$,

$q^2 = 25$

Из первых двух равенств $p = 5$, $q = (35 – 25)/2 = 5$

Получаем $(x^2 + 5x + 5)^2 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

Контрольные вопросы:

1. Что такое многочлен?
2. Как определить степень многочлена?
3. Как разделить один многочлен на другой?
4. Как формулируется теорема Безу?
5. Как определить возможные делители многочлена?

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Краткий курс высшей математики: учебник / К.В. Балдин [и др.]. — М.: Дашков и К, 2012. — 510 с.

2. Кундышева, Е.С. Математика: учебник / Е.С. Кундышева. — М.: Дашков и К, 2011. — 561 с.

3. Малыхин, В.И. Высшая математика: учебное пособие / В.И. Малыхин. — М.: Инфра-М, 2010. — 363 с.

4. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. — Мн.: ТетраСистемс, 2012. — 204 с.

Дополнительная литература

1. Баврин, И.И. Высшая математика: учебник по естественно-научным направлениям и специальностям / И.И. Баврин. — М.: Академия, 2010. — 611 с.

2. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. — М.: АСТ: Астрель, 2010. — 703 с.

3. Высшая математика / А.И. Астровский, Е.В. Воронкова, О.П. Степанович: учебно-методический комплекс. — Мн: Издательство МИУ, 2009. — 383 с.

4. Высшая математика: учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. — М.: Флинта: МПСИ, 2010. — 359 с.

5. Высшая математика: курс лекций: для студентов экономических специальностей / Г.М. Булдык. — Мн: ФУАинформ, 2010. — 541 с.

6. Высшая математика: учебник для студентов высших технических учебных заведений / Г.Л. Луканкин [и др.]. — М.: Высшая школа, 2009. — 583 с.

Программное обеспечение:

1. Excel
2. Word

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. http://ru.wikipedia.org

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА
(методические указания по изучению дисциплины и дидактические материалы)

Процесс изучения дисциплины включает в себя:

1. Работу под руководством преподавателя: лекции, решение задач, примеров, консультации преподавателя по вопросам, в которых студент не смог разобраться самостоятельно, и консультация преподавателя перед зачетом.

Лекции обычно носят проблемный характер и нацелены на освещение наиболее трудных вопросов. После лекции желательно вечером перечитать и закрепить полученную информацию, тогда эффективность ее усвоения значительно возрастает. В ходе лекционных занятий рекомендуется вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на формулировки математических терминов. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

2. Самостоятельная работа студентов проводится с целью развития у них навыков работы с учебной и научной литературой, выработки способности вести научно-исследовательскую работу, а также для систематического изучения курса. Она включает изучение материала установочных занятий и рекомендованной литературы, выполнение заданий преподавателя (домашних контрольных заданий).

Самостоятельную работу целесообразно начинать с изучения установленных требований к знаниям, умениям и навыкам, ознакомления с разделами и темами дисциплины в порядке, предусмотренном учебной программой. Получив представление об основном содержании раздела, темы, необходимо изучить материал по учебнику, придерживаясь рекомендаций преподавателя по методике работы над учебным материалом.

Начинать изучение курса в целом или темы необходимо с рассмотрения его содержания по программе, затем можно приступить к рассмотрению отдельных тем. Работая самостоятельно с учебной литературой, желательно вести конспект. Кроме того, после прочтения материала по теме для конкретизации прочитанной информации ее можно представить в виде таблиц, схем, графиков. Это позволяет упорядочить знания, а при повторном чтении - легко восстановить в памяти. Переходить к изучению новой темы следует только после полного изучения теоретических вопросов, выполнения самопроверки и решения задач по предыдущей теме.

Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие вопросы темы учебного курса и с какой глубиной раскрыты в конкретном учебном материале, а какие вообще опущены.

Требуется творческое отношение и к самому содержанию дисциплины. Вопросы, составляющие ее содержание, обладают разной степенью важности.

Есть вопросы, выполняющие функцию логической связки содержания темы и всего курса, имеются вопросы описательного или разъяснительного характера, а также исторического экскурса в область изучаемой дисциплины. Все эти вопросы не составляют сути понятийного, концептуального содержания темы, но необходимы для целостного восприятия изучаемых проблем.

Выполнение практических заданий

Одной из активных форм самостоятельной работы студента является решение задач. Ниже приведены пособия для решения задач.

1. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. — Айрис-пресс, 2011. — 576 с.

2. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Сборник задач по высшей математике. — ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 304 с.

3. В.Н. Земсков, В.В. Лесин, А.С. Поспелов, А.А. Прокофьев, Т.В. Соколова. Сборник задач по высшей математике. — Юрайт, 2012. — 608 с.

Примеры разбора задач:

Тема 1. Матрица. Сложение матриц

Найти 2А – В, если, $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

Решение:

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Разностью двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij}-b_{ij}$.

При умножении матрицы на константу, все элементы матрицы умножаются на эту константу.

Поэтому, $2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}$.

Тема 2. Умножение матриц

Задача: Найти произведение матриц

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$

Решение.

Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$, где $i = \overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, заданных в определенном порядке АВ, называется матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} +\ldots + a_{im}b_{mk} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sk}.$$

Имеем: матрица А размера 2´3, матрица В размера 3´3, тогда произведение АВ = С существует и элементы матрицы С равны:

$c_{11} = 1\times1 + 2\times2 + 1\times3 = 8$,

$c_{21} = 3\times1 + 1\times2 + 0\times3 = 5$,

$c_{12} = 1\times2 + 2\times0 + 1\times5 = 7$,

$c_{22} = 3\times2 + 1\times0 + 0\times5 = 6$,

$c_{13} = 1\times3 + 2\times1 + 1\times4 = 9$,

$c_{23} = 3\times3 + 1\times1 + 0\times4 = 10$.

$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$, а произведение ВА не существует.

Тема 3. Определитель матрицы

Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам второго столбца.

Решение. Разложим определитель по элементам второго столбца:

$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$

$$= (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -20.$$

Тема 4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+2\cdot4-11 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10+28-26 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14+8-10 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26-20+22 = -24.$$

Тема 5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x-2y+3z=5, \\ x-5y+2z=3, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сведем ее к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\times(-3) + \Big| \times(-2) \quad + \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 13 & -3 & -10 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, несложно заметить, что третье уравнение системы будет ложным, а значит, система решений не имеет.

Тема 6. Векторы на плоскости и в пространстве

Задача. Даны векторы $\bar{a}=\{0;-3;4\}, \bar{b}=\{-5;2;1\}$.

Найти угол между ними.

Решение. Из определения $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$ найдем $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0-6+4=-2;$

Тема 7. Прямая линия на плоскости. Системы координат на плоскости: декартовы и полярные координаты

Дана прямая $2x+3y-5=0.$

Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M_1(1;-2)$:

1) параллельно данной прямой;
2) перпендикулярно к данной прямой.

Решение. 1. Нормальный вектор $\vec{n}=(A;B)=(2;3)$ данной прямой будет являться нормалью и для любой параллельной ей прямой.

Следовательно, множество прямых линий, параллельных данной прямой, можно записать как $2x+3y+C=0$.

Для определения свободного члена C подставим координаты точки $M_1(1;-2)$, через которую должна пройти прямая: $2\cdot1+3\cdot(-2)+C=0$, т.е. $C=4$.

Следовательно, $2x+3y+4=0$ и есть искомая прямая.

2. Нормальный вектор $\vec{n}=(A;B)=(2;3)$ данной прямой будет являться направляющим для любой параллельной ей прямой.

Следовательно, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$ и есть искомая прямая (каноническое уравнение).

При желании отсюда легко можно выписать общее уравнение прямой:

$$3(x-1)=2(y+2),\ 3x-3=2y+4,\ 3x-2y-7=0.$$

Тема 8. Кривые второго порядка

Задача. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1) его полуоси равны 4 и 3;
2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 6;
3) его большая ось равна 12, а эксцентриситет равен $\frac{2}{3}$.

Решение.

1) Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет эллипс.

Числа *a и b*являются полуосями эллипса, т.е. $a=4, b=3$.

Получим $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

2) $2a=10,\ 2c=6,$ т.е. $a=5,\ c=3.$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4.$

Получим $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.

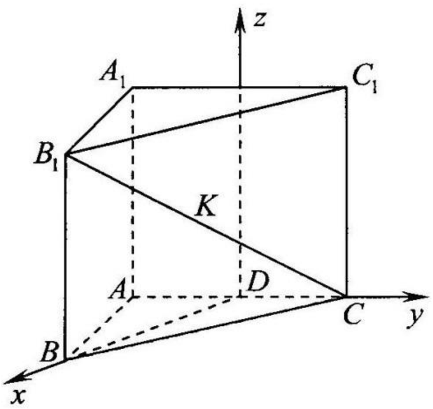
3) $2a=12,$ т.е. $a=6,\ e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$, т.е. $\frac{c}{6}=\frac{2}{3}$, откуда $c=4.$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}.$

Получим $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

Тема 9. Плоскость

Задача. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ABC, основание AC и высота BD которого равны 4. Боковое ребро равно 2. Через середину K отрезка B_1C проведена плоскость, перпендикулярная к этому отрезку. Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости.



Решение. Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной призмы и точки K в этой системе координат: A(0;–2;0), B(0;0;0), C(0;2;0), B_1(4;0;2), K(2;1;1). Тогда $\overrightarrow{B_1C}\{-4;2;-2\}$. Этот вектор перпендикулярен плоскости, значит, он является его нормалью. К тому же плоскость проходит через точку *K*. То есть уравнение плоскости имеет вид $-2(x-2)+$ $+2(y-1)-2(z-1)=0$ или, после упрощения, $2x-$ $-y+z-4=0$.

Теперь находим расстояние от A(0;-2;0) до плоскости:

$$\rho(A;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Тема 10. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

Задача. Отрезок, соединяющий центр шара с точкой *A* касательной плоскости, равен *17 см*. Радиус шара *8 см*. Найдите расстояние от точки *A* до точки касания шара с плоскостью и от точки *A* до ближайшей к ней точки шара.

Решение.

$AK \perp OK$. По теореме Пифагора $AK = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. AM — ближайшее расстояние от точки *A* до сферы

$AM = AO - OM = 9$.

Тема 11. Комплексные числа

Задача. Выполнить сложение, вычитание, умножение и деление двух комплексных чисел

x = -2 + 3i и y = 3 + 4i.

Решение.

1. $x + y = -2 + 3i + 3 + 4i = -2 + 3 + (3 + 4)i = 1 + 7i$.
2. $x - y = -2 + 3i - (3 + 4i) = -2 - 3 + (3 - 4)i = -5 - i$.
3. $x \cdot y = (-2 + 3i)(3 + 4i) = -2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + (-8 + 9)i = -18 + i$.
4. $x : y = \dfrac{-2+3i}{3+4i} = \dfrac{(-2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{6}{25} + \dfrac{17}{25}i$

Тема 12. Многочлены

Задача. Выполнить деление $P(x) = x^3 - 1$ на $Q(x) = x + 1$.

Решение. Выполним деление углом.

$$
\begin{array}{l}
\_x^3 - 1 \quad x + 1 \\
x^3 + x^2 x^2 - x + 1 \\
\ \_- x^2 - 1 \\
\ - x^2 - x \\
\ \_x - 1 \\
x + 1 \\
\ -2
\end{array}
$$

Отсюда получаем $x^3 - 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 2$. Частное $S(x) = x^2 - x + 1$, остаток $R(x) = -2$.

Подготовка к экзамену

К **экзамену** необходимо начинать готовиться с первой лекции по данному курсу. Общение с преподавателем в аудитории во время лекционных занятий, в ходе которых студент постепенно, «шаг за шагом», осваивает новую учебную информацию, позволяет ему быть не просто реципиентом (т.е. всего лишь слушателем, пассивно воспринимающим новую информацию), но активным соучастником образовательного процесса, гарантирует высокое качество этого процесса. Именно такой подход, предполагающий постоянную, систематическую работу студента по освоению учебного материала, позволяет ему получить наиболее глубокие и прочные знания.

Перечень вопросов для подготовки к экзамену

1. Метод координат на плоскости. Основные задачи, решаемые методом координат.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой.
3. Уравнение прямой в отрезках. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку; через две данные точки.
5. Расстояние от точки до прямой.
6. Окружность. Уравнение окружности.
7. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса.
8. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты и эксцентриситет гиперболы.
9. Парабола. Каноническое уравнение параболы.
10. Линейные операции над векторами и их свойства.
11. Линейная зависимость векторов на плоскости.
12. Проекция вектора на ось и ее свойства.
13. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Разложение вектора по ортам координатных осей.
14. Действия над векторами, заданными проекциями. Координаты точки. Координаты вектора.
15. Скалярное произведение векторов и его свойства.
16. Векторное произведение векторов и его свойства.
17. Смешанное произведение векторов и его свойства.
18. Действия над матрицами.
19. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы.
20. Ранг матрицы.
21. Матричные уравнения.
22. Определители второго и третьего порядка. Свойства определителей.
23. Понятие минора и алгебраического дополнения. Разложение определителя по элементам ряда.
24. Выражение векторного и смешанного произведений векторов через координаты сомножителей.

25. Невырожденные матрицы. Обратная матрица. Алгоритм ее нахождения.

26. Система линейных уравнений (СЛУ). Основные понятия. Решение СЛУ матричным способом.

27. Формулы Крамера.

28. Метод Гаусса решения СЛУ.

29. Теорема Кронекера-Капели.

30. Понятие n-мерного векторного пространства.

31. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

32. Квадратичные формы. Приведение канонической формы к каноническому виду.

33. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

34. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

35. Уравнение плоскости в отрезках.

36. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.

37. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

38. Расстояние от точки до плоскости.

39. Векторное и параметрическое уравнение прямой в пространстве.

40. Канонические уравнения прямой.

41. Общее уравнение прямой. Переход к каноническим уравнениям.

42. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямой в пространстве.

43. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.

44. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

45. Пересечение прямой с плоскостью.

46. Условие принадлежности прямой плоскости.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Тест — задание, испытание стандартной формы, по результатам выполнения которых можно судить о способности, предрасположенности, а также о знаниях, умениях испытуемого.

Чтобы правильно ответить на тестовые задания необходимо проработать самостоятельно материал по основным темам дисциплины, используя специальную литературу по дисциплине (см. раздел «Литература»).

У студентов, обучающихся с применением дистанционных технологий, промежуточный контроль (зачет и экзамен) по дисциплине осуществляются посредством выполнения тестовых заданий.

Требования к контролю:

– контрольная работа — 7 тестовых заданий. Для успешной сдачи дисциплины нужно правильно ответить на 3 вопроса (40%). Ограничение по времени — 30 минут;

– зачет — 15 тестовых заданий. Для успешной сдачи дисциплины нужно правильно ответить на 6 вопросов (40%). Ограничение по времени — 45 минут;

– экзамен — 25 тестовых заданий. Ограничение по времени — 60 мин.

Критерии оценки знаний, умений и навыков по промежуточному контролю:

– неудовлетворительно — 0–9 баллов или до 39%;

– удовлетворительно — 10–14 баллов или 40–59%;

– хорошо — 15–19 баллов или 60–79%;

– отлично — 20–25 баллов или 80–100%.

Тема 1. Матрица. Обратная матрица

1. Матрицей второго порядка называется:

1) определитель;
2) выражение с двумя элементами;
3) таблица из четырех элементов;
4) четыре числа;

2. Размером матрицы называется:

1) количество элементов в матрице;
2) количество строк в матрице;
3) сумма числа строк и числа столбцов;
4) произведение m x n числа столбцов и строк;

3. В квадратной матрице…

1) все элементы одинаковы;
2) четное число элементов;
3) число строк равно числу столбцов;
4) только целые числа;

4. Две матрицы равны, если…

1) имеют одинаковые размеры;
2) имеют одинаковый порядок;
3) имеют одинаковые размеры и соответствующие элементы;
4) у них совпадают диагональные элементы;

5. Нулевая матрица, это такая матрица, в которой…

1) все элементы нулевые;
2) на главной диагонали — нули;
3) хоть один элемент нулевой;
4) есть строка (столбец) из нулей;

6. Что указывает первый индекс элемента матрицы?

1) номер столбца элемента;
2) номер строки элемента;
3) количество строк в матрице;
4) количество столбцов в матрице;

Тема 2. Сложение, умножение матриц

1. Результатом сложения двух матриц есть

1) матрица того же порядка и размера;
2) числовое значение;
3) матрица большего размера;
4) диагональная матрица;

2. Какое выражение не верно?

1) "сложение матриц коммутативно";
2) "сложение с нулевой матрицей не меняет матрицу";
3) "сложение матриц ассоциативно";
4) "складывать можно только квадратные матрицы";

3. При умножении матрицы A порядка n*m на матрицу B порядка m*k получится матрица порядка

1) n*m;
2) m*k;
3) n*k;
4) m*m;

4. Какую матрицу можно возвести в квадрат?

1) прямоугольную;
2) нулевую;
3) квадратную;
4) абсолютно любую;

5. Чтобы умножить две матрицы надо..

1) умножить их элементы;
2) строки первой умножить на столбцы второй и просуммировать;
3) строки первой умножить на строки второй и просуммировать;
4) их транспонировать и перемножить элементы;

Тема 3. Определитель матрицы

1. Обратная матрица для данной матрицы не существует, если

1) определитель данной матрицы равен нулю;
2) в данной матрице хоть один элемент нулевой;
3) данная матрица не вырожденная;
4) в данной матрице элементы главной диагонали нулевые;

2. Элементы обратной матрицы это —

1) алгебраические дополнения;
2) миноры;
3) мажоры;
4) противоположные элементы;

3. Что такое определитель 3-го порядка?

1) Вектор, координатами которого являются элементы, стоящие на главной диагонали матрицы.

2) Вектор, координатами которого являются элементы, стоящие на побочной диагонали матрицы.

3) Некоторое число, определенным образом сопоставленное с матрицей.

4) Решение системы уравнений, из коэффициентов которой составлена матрица.

4. Чему равен определитель третьего порядка, все элементы третьей строки которого равны нулю?

1) Произведению элементов главной диагонали.
2) Произведение элементов 1 строки + произведение элементов 2 строки.
3) Нулю.
4) Среди перечисленных ответов правильного нет.

5. Как изменится определитель 3-го порядка, если все элементы какой-либо строки умножить на какое-либо число?

1) Определитель останется прежним.
2) Определитель станет равным нулю.
3) Определитель умножится на это число.
4) Среди перечисленных ответов правильного нет.

Тема 4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

1. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

1) x=1 y=2 z=3
2) x=0 y=2 z=1
3) x=1 y=1 z=1

2. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y \;\; + z = \;\; 2, \\ \;\; x + 5y - 4z = -5, \\ 4x \;\; + y - 3z = -4. \end{cases}$$ x=1 y=2 z=3

1) x=5 y=6 z=10
2) x=0 y=3 z=10
3) x=3 y=6 z=1
4) x=15 y=2 z=3

3. При умножении матрицы на обратную ей получаем:

1) нулевую
2) транспонированную
3) единичную

4. Какая система называется однородной?

1) содержащая одинаковые уравнения
2) у которой свободные члены равны 0
3) у которой количество уравнений совпадает с числом переменных

Тема 5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

1. Метод исключения переменных это:

1) метод Гаусса
2) метод Крамера
3) матричный метод.

2. Каким методом можно решить система уравнений, если определитель системы = 0?

1) методом Гаусса
2) методом Крамера
3) матричным методом

3. По формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В ответе указать значение суммы переменных x_1, x_2 и определителя Δ

1) 7
2) 9
3) 5

4. Каким методом можно решить система уравнений, если определитель системы=0?

1) методом Гаусса
2) методом Крамера
3) матричным методом.

5. Какая система называется однородной?

1)содержащая одинаковые уравнения
2) у которой свободные члены равны 0
3) у которой количество уравнений совпадает с числом переменных

Тема 6. Векторы на плоскости и в пространстве

1. Определить длину вектора $\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$ **, если** $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$

1) 12
2) $12\sqrt{3}$
3) 24

2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

Найти с точностью до 0,1 проекцию вектора $(\vec{b} + \vec{c})$ на направление вектора $(\vec{a} + \vec{b})$

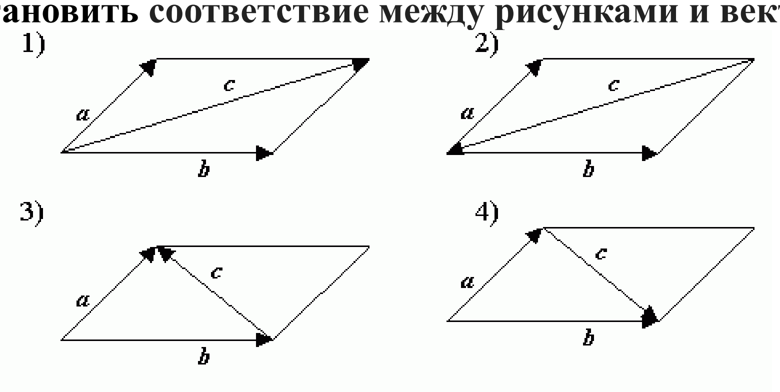
1) 4,7
2) 2,5
3) другой ответ

3. Выяснить, какие из приведенных троек векторов образуют базис в трехмерном пространстве

1. (0; 0; 1), (0; 1; 0), (0; 1; 1),
2. (0; 0; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0),
3. (1; 1; 1), (0; 1; 0), (2; 2; 2),

1) 1
2) 2
3) 3

4. Установить соответствие между рисунками и векторным равенством



$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

5. Два вектора коллинеарны, если:

1) Их векторное произведение равно 0
2) Их скалярное произведение равно 0

Тема 7. Прямая линия на плоскости.
Системы координат на плоскости: декартовы и полярные координаты

1. Найти в градусах острый угол между прямыми 4x-2y-7=0 и

1) 45
2) 60
3) 30

2. A(-4; 3), B(2; 5), C(6; -2) — вершины треугольника ABC. Составить уравнение высоты 4x+by+c=0, проведенной из вершины A

1) b= -7, c=37
2) b= 7, c=37
3) b= -7, c=-5

3. Найти расстояние между параллельными прямыми

$y = -0,75x - 6$ и $3x + 4y - 12 = 0$

1) 7,2
2) 2,4
3) другой ответ

4. Для прямой y=kx+b угол между осью ох и прямой равен

1) arccos(k)
2) arcsin(k)
3) b

5. Для прямых y=kx+b и y=kx расстояние между ними равно

1) arccos(k)
2) arcsin(k)
3) b

Тема 8. Кривые второго порядка

1. Написать уравнение окружности, касающейся оси Ох в начале координат и проходящей через точку А(0; -8)

1) x2+ (y+4)2=16
2) x2+y2=64
3) (x+4)2+ y2=16

2. Какую кривую второго порядка определяет уравнение

$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 40$

1) окружность
2) гиперболу
3) параболу
4) эллипс

3. Указать каноническое уравнение эллипса, если даны его полуоси a = 3, b = 4

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$
2) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$
3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

4. Какую кривую второго определяет уравнение $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$

1) окружность
2) гиперболу
3) параболу
4) эллипс

5. Найти расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{24}=1$

1) $4\sqrt{10}$
2) $2\sqrt{10}$
3) $4\sqrt{22}$
4) $4\sqrt{22}$

Тема 9. Плоскость

1. Сколько прямых можно провести через одну точку пространства?

1) Ни одной.
2) Одну.
3) Две.
4) Бесконечно много.

2. Сколько плоскостей можно провести через одну точку пространства?

1) Ни одной.
2) Одну.
3) Две.
4) Бесконечно много.

3. Сколько прямых можно провести через две точки пространства?

1) Ни одной.
2) Одну.
3) Две.
4) Бесконечно много.

4. Сколько плоскостей можно провести через две точки пространства?

1) Ни одной.
2) Одну.
3) Две.
4) Бесконечно много.

5. Как записывается уравнение плоскости

1) Ax + By + Cz +D = 0
2) Ax^2 + By + Cz +D = 0
3) Ax^2 + By^2 + Cz +D = 0

Тема 10. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

1. Множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами, есть:

1) прямая линия
2) окружность
3) гипербола
4) парабола
5) эллипс

2. Множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус, есть:

1) прямая линия
2) окружность
3) гипербола
4) парабола
5) эллипс

3. Множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами, есть:

1) прямая линия
2) окружность
3) гипербола
4) парабола
5) эллипс.

4. Какое уравнение не определяет эллипс?

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
3) $4x^2 + 9y^2 = 36$

5. Парабола симметрична относительно:

1) оси ординат
2) оси абсцисс
3) начала координат

Тема 11. Комплексные числа

1. Вычислить (2 − i) + (3 + 2i)

1) −5 − i ;
2) −5 + i ;
3) 5 − i ;
4) 5 + i ;

2. Вычислить (2 + i) + (3 + 2i)

1) −5 − i ;
2) −5 + i ;
3) 5 − i ;
4) 5 + 3i ;

3. Вычислить i+ 2i

1) −5 − i ;
2) −5 + i ;
3) 5 − i ;
4) 3i ;

4. Верно ли, что не существует ни одного комплексного числа, равного квадрату своего сопряженного числа

1) да
2) нет

5. Вычислить (1+ 2i)i

1) −5 − i
2) −5 + i
3) 5 − i
4) i – 2

Тема 12. Многочлены

1. Степень многочлена $x^5 + x + 1$ равна

1) 5
2) 3
3) 4

2. Степень многочлена $x^2 + 1$ равна

1) 5
2) 3
3) 2

3. Произведение многочленов x – 1 и x + 1 равно

1) $x^2 – 1$
2) x
3) x + 1

4. Произведение многочленов x + 1 и x + 1 равно

1) $x^2 + 1 + 2x$
2) x
3) x + 1

5. Многочлен $x^2 – 1$ делится на x – 1

1) да
2) нет

Учебное издание

БОГОМОЛОВА Ольга Игоревна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
для студентов экономического факультета

Корректор *Шамонова А.М.*
Техническое редактирование, оформление *Издательство «Юниверсум»*

Формат 60*90/16. Бумага газетная.
Гарнитура New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 2,13. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство «Юниверсум».
420111, г. Казань, ул. Профсоюзная, д. 13/16.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов
в типографии ОАО «Щербинская типография».
117623, г. Москва, ул. Типографская, д. 10. Тел. 659-2327

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК