ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ ЗНАНИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ЭКОНОМИКЕ

0073.03.01

Курзин С.П.

МАТЕМАТИКА

часть I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для студентов экономического факультета

3-е издание

Казань
ЮНИВЕРСУМ
2010

УДК 512
ББК 22.143
К93

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом
Института социальных и гуманитарных знаний

Рецензенты:
В.Ф. Фролов – к.ф.-м.н., доцент кафедры физики и математики КГАУ,
Ю.В. Кит – зав. кафедрой государственного и муниципального управления Института социальных и гуманитарных знаний, доцент

Курзин С.П.
К93 Математика: часть I. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии и основы математического анализа: Учебное пособие для студентов экономического факультета / Курзин С.П. – 3-е изд. – Казань: Изд-во «Юниверсум», 2010. – 112с.
ISBN 978-5-9991-0120-4

Учебное пособие по дисциплине «Математика» составлено в соответствии с требованиями федерального компонента к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного специалиста по циклу общих математических и естественнонаучных дисциплин государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования РФ и является обязательным для изучения.

УДК 512
ББК 22.143

Учебное издание

КУРЗИН Сергей Павлович
МАТЕМАТИКА
часть I
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для студентов экономического факультета

Корректор *Шамонова А.М.*
Технический редактор, оформление *Александрова М.Н.*

Формат 60*90/16. Бумага газетная. Гарнитура New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 3,44. Тираж 600 экз. Заказ №
Издательство «Юниверсум». 420012, г. Казань, ул. Достоевского, д. 10.
Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в типографии ОАО «Щербинская типография». 117623, г. Москва, ул. Типографская, д. 10.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Математика I» (Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии и основы математического анализа) является основным и входит в цикл общеобразовательных дисциплин для студентов всех экономических специальностей. На него опираются такие курсы, как теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций, математические методы, микро-, макроэкономика и ряд других экономико-математических дисциплин.

Предмет курса – изучение основ математического анализа и линейной алгебры в объеме, необходимом для понимания методов, используемых в анализе экономических процессов и применения их при решении практических задач.

Цель курса – общематематическая подготовка студентов экономического факультета, необходимая в дальнейшем для освоения математических и статистических методов в экономике; воспитание у студентов математической культуры, развитие навыков логического мышления и формального обоснования принимаемых решений.

Задачи курса:

- ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач экономики и управления;
- привить умение самостоятельно изучать литературу по линейной алгебре и математическому анализу;
- развить логическое и алгоритмическое мышление;
- воспитать абстрактное мышление и умение строго излагать свои мысли;
- выработать у студентов навыки к математическому исследованию прикладных вопросов

Особенностью курса является его прикладная экономическая направленность: рассматриваются простейшие приложения математики в экономике и управлении. Важнейшей чертой курса является многообразие тем с примерами и задачами экономического содержания, т.е. содержание курса адаптировано для студентов. К особенности курса также можно отнести то, что рассмотрение большинства тем начинается с постановки практической задачи, затем рассматривается соответствующий математический аппарат, решается поставленная задача.

В результате изучения курса студенты **должны знать** основы математического анализа и линейной алгебры с элементами аналитической геометрии, у**меть** применять полученные знания к решению прикладных задач экономики и управления.

ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 060500 – «БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ, АНАЛИЗ И АУДИТ»

Общие математические и естественнонаучные дисциплины
Федеральный компонент

Математика (ЕН.Ф.01)

Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: операции над векторами и матрицами; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства; собственные значения матриц; комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве; выпуклые множества и их свойства.

Математический анализ и дифференциальные уравнения: предел последовательности и его свойства; предел и непрерывность функции; экстремумы функций нескольких переменных; неопределенный и определенный интегралы; числовые и степенные ряды; дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА I» (1-й курс)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами

Понятие матрицы, виды матриц. Действия над матрицами и их свойства: сложение, умножение на число, произведение, возведение в целую степень, транспонирование. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы.

Тема 2. Определители

Основные понятия. Вычисление определителей 2-3 порядка, правило Саррюса. Свойства определителей. Дополнительный минор, алгебраическое дополнение. Разложение определителей по элементам некоторого ряда.

Тема 3. Ранг матрицы

Основные понятия: минор k-го порядка, ранг матрицы, базисный минор. Метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований для нахождения ранга матрицы.

Тема 4. Обратная матрица

Невырожденная матрица. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Матричные уравнения.

Тема 5. Система *n*-линейных уравнений с *n* неизвестными (СЛУ)

Совместная, несовместная, определенная, неопределенная СЛУ. Матричный способ решения СЛУ. Формулы Крамера.

Тема 6. Произвольная система линейных уравнений (*m*-уравнений) с *n* неизвестными

Метод Гаусса решения СЛУ. Понятие основной и расширенной матриц СЛУ. Теорема Кронекера-Капелли. Нахождение общего, частного и базисного решений.

Тема 7. *n*-мерное векторное пространство

Определение n-мерного вектора. Действия над векторами, свойства. Понятие n-мерного векторного пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов.

Тема 8. Линейные операторы

Определение. Действия над линейными операторами. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы).

Тема 9. Квадратичные формы

Определение. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы.

Тема 10. Векторы на плоскости и в пространстве

Основные понятия. Линейные операции над векторами. Правила параллелограмма и треугольника. Проекция вектора на ось и ее свойства. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы. Действия над векторами, заданными проекциями.

Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Их основные свойства.

Тема 11. Прямая линия на плоскости

Метод координат. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой, его исследование. Уравнение прямой в отрезках. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Расстояние от точки до прямой.

Тема 12. Кривые второго порядка

Окружность. Каноническое уравнение окружности. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Эксцентриситет и директрисы эллипса. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты, эксцентриситет и директрисы гиперболы. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Эксцентриситет и директрисы параболы.

Тема 13. Плоскость

Нормальное уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости. Исследование общего уравнения. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и через три данные точки. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

Тема 14. Прямая линия в пространстве

Векторное уравнение прямой линии. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Общее уравнение прямой линии. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.

Тема 15. Прямая и плоскость в аффинном пространстве

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости.

Тема 16. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

Цилиндрические, конические поверхности. Поверхности вращения. Эллипсоид. Гиперболоид.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 1. Множества. Действительные числа

Множества и подмножества, их свойства. Операции над множествами. Отношения между множествами. Выпуклые множества и их свойства. Числовые множества. Элементы логической символики. Числовые промежутки. Окрестность точки. Абсолютная величина вещественного числа. Свойства абсолютных величин.

Тема 2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности

Понятие о числовых последовательностях. Последовательности как функции на множестве натуральных чисел. Способы задания. Основные характеристики: монотонность, ограниченность. Предел последовательности: определение, геометрический смысл. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Операции над пределами последовательностей. Пределы и неравенства. Число e как предел последовательности. Натуральные логарифмы.

Тема 3. Функция одной переменной. Графики элементарных функций

Понятие функции. Область определения, область изменения. Способы задания функции действительного аргумента. Основные характеристики: четные, нечетные, монотонные, периодические функции. Обратная функция. Сложная функция. Основные элементарные функции и их графики.

Тема 4. Предел функции одной переменной

Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией. Теоремы о пределах. Признаки существования пределов.

Замечательные пределы и их следствия. Эквивалентные бесконечно малые функции.

Тема 5. Непрерывность функции одной переменной

Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции в интервале и на отрезке. Точки разрыва и их классификации. Основные теоремы о непрерывных функциях (сумма, разность, произведение, частное). Непрерывность элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, промежуточного значения.

Тема 6. Производная и дифференциал функции одной переменной

Понятие производной, механический и геометрический смысл. Уравнение нормали и касательной к кривой. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Производная суммы, разности, произведения, частного. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Дифференцирование неявных функций. Производные высших порядков. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.

Тема 7. Свойства дифференцируемых функций

Основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши). Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя. Формулы Тейлора. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

Тема 8. Исследование функций

Условия монотонности функции. Экстремум функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия максимума и минимума. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графика функции.

Тема 9. Комплексные числа

Основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление. Извлечение корней из комплексных чисел.

Тема 10. Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной, метод интегрирования по частям, интегрирование рациональных дробей. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы.

Тема 11. Определенный интеграл

Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Геометрический смысл интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения. Приближенное вычисление определенного интеграла.

Тема 12. Несобственные интегралы

Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования. Интеграл от разрывной функции.

Тема 13. Дифференциальные уравнения

Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике.

Тема 14. Ряды

Понятие числового ряда. Числовые ряды с неотрицательными членами. Признаки их сходимости. Сходимость произвольных числовых рядов. Определение и свойства степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.

Тема 15. Функции нескольких переменных. Основные понятия

Область определения. Способы задания. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость и полный дифференциал функции. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области. Условный экстремум. Метод Лагранжа

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ТЕМА 1. Матрицы. Действия над матрицами

Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) называются элементами матрицы A. Первый индекс обозначает номер строки, второй — номер столбца, в которых находится данный элемент.

Матрицы можно обозначать также $A = (a_{ij})$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$).

Элементы a_{ii} ($i = 1, \dots, \min\{m, n\}$) называются диагональными, а их совокупность – главной диагональю матрицы А.

Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей-строкой, а матрица размера $m \times 1$ называется матрицей-столбцом.

При $m = n$ матрица называется квадратной матрицей порядка n.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется диагональной, если все ее элементы, кроме диагональных, равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$ $i \neq j$.

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются равными, если они одного и того же размера $m \times n$ и $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$ называется транспонированной по отношению к матрице $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, если $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ имеем $b_{ij} = a_{ji}$, т.е.

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица обозначается символом A^{T}.

Квадратная матрица A называется симметричной, если $A^{\mathrm{T}} = A$.

Сложение матриц

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного и того же размера $m\times n$ называется матрица того же размера $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; (i = 1,..., m; \; j = 1,..., l)$$

То, что матрица С является суммой матриц А и В, записывается в виде С=А+В. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой (0).

Матрица X такая, что $X + A = O$, называется противоположной матрице A и обозначается символом $-A$. Пусть A и B – матрицы размера $m\times n$.

Матрица $C = A + (-B)$ называется разностью матриц A и B и записывается в виде $C = A - B$.

Для любых матриц A, B и C одного и того же размера $m\times n$:

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- если O – нулевая матрица размера $m\times n$, то $A + O = A$; $A + (-A) = O$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ и вещественного числа α называется матрица того же размера $C = (c_{ij})$, элементы которой определяется формулой

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \; (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$$

То, что матрица C является результатом умножения матрицы A на число α, записывается в виде $C = \alpha A$.

Для любой матрицы A и любых чисел $\alpha, \beta \in R$:

- $1\cdot A = A$;
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Для любых матриц A и B одного и того же размера и любых чисел $\alpha, \beta \in R$:

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Операции сложения и умножения на число называют линейными операциями.

Умножение матриц

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ и матрицы $B = (b_{ij})$ размера $n\times l$ называется матрица $C = (c_{ij}) = A \cdot B$ размера $m\times l$, элементы которой определяются формулой:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \; (i = 1,..., m; \; j = 1,..., l) \, .$$

То, что матрица C является произведением матриц A и B, записывается в виде $C = A\cdot B$.

Заметим, что произведение матриц A и B определено только, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$ (даже для квадратных матриц одного и того же размера).

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы называются перестановочными или коммутативными.

Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие на главной диагонали, равны единице, а остальные – нулю, т.е. матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной матрицей.

Для любой квадратной матрицы A

$$A \cdot E = E \cdot A = A,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и A.

- Умножение матриц ассоциативно, т.е. выполняется равенство
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
- Умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. если определено выражение $A \cdot (B + C)$, то
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Возведение матрицы в натуральную степень. Многочлен от матрицы

Натуральная степень квадратной матрицы вычисляется по формуле:

$$A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \ n \text{ раз } (n \in N).$$

Следовательно, если $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ – многочлен n-ой степени ($n \in N$) относительно x, то

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_1 A^2 + \ldots + a_n A^n,$$

где A – квадратная матрица порядка n и E – единичная матрица того же порядка.

ТЕМА 2. Определители

Основные понятия

Пусть $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ – квадратная матрица порядка n.

Определителем (или детерминантом) матрицы A называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и может быть вычислено по ее элементам. Обозначается определитель матрицы A символами

$$\det A, \ \Delta \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы $n \times n$ называется определителем **n-**го порядка**.**

Правило вычисления определителей

1. Определителем матрицы 1×1, состоящей из одного числа, будем считать само это число.

2. Определитель матрицы 2×2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Определитель матрицы 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычисляется по правилу Саррюса: приписать к определителю справа два первых столбца, не меняя их порядка, и составить сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, из которой затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов параллельных ей.

Чтобы сформулировать общее правило вычисления определителя, введем понятия дополнительного минора и алгебраического дополнения элемента матрицы:

Дополнительным минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ элемента матрицы n-го порядка a_{ij} (i, j = 1, …, n) называется определитель матрицы n 1-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента матрицы n-го порядка a_{ij} (i, j= 1, …, n) называется число $(-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – дополнительный минор.

Определитель матрицы A n-го порядка может быть вычислен по любой из формул:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

разложение по i–ой строке или

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

разложение по j–ому столбцу.

Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы величина ее определителя не меняется, т.е.

$$\det A^T = \det A.$$

2. Отсюда следует, что любое утверждение, справедливое для столбцов определителя, справедливо также и для строк.

3. При перестановке двух столбцов (или строк) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

4. Если матрица имеет два одинаковых столбца (или две одинаковые строки), то ее определитель равен нулю.

5. Если все элементы какого-нибудь столбца (или строки) матрицы умножить на одно и то же число, то ее определитель умножится на это число.

6. Если матрица содержит столбец (строку), состоящую из нулей, то ее определитель равен нулю.

7. Если элементы какого-нибудь столбца (строки) матрицы представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы можно представить в виде суммы двух определителей.

8. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

9. Если к элементам какого-нибудь столбца (строки) матрицы прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится.

10. Сумма произведений элементов любого столбца (строки) матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

ТЕМА 3. Ранг матрицы

Основные понятия

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо $к$ строк и $к$ столбцов.

Рангом матрицы A (rang A или $r(A)$) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Базисным минором называется любой из миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Свойства ранга матрицы

а) если матрица A имеет размеры $m \times n$, то rang $A \le min(m;n)$;

б) rang $A = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны 0;

в) если матрица A – квадратная порядка n, то rang $A = n$ тогда и только тогда, когда $|A| \ne 0$.

Элементарные преобразования

Элементарные преобразования, не меняющие ранга матрицы:

а) отбрасывание нулевой строки (столбца);

б) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;

в) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;

г) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

д) транспонирование матрицы.

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \neq 0, i = 1,..., r; r \leq k$.

Ранг ступенчатой матрицы равен r:

Строки (столбцы) матрицы e_1, $e_2,\dots,e_m$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа λ_1, $\lambda_2,\dots$, λ_m, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 +\dots + \lambda_m e_m = 0$, где $0 = (0,0,\dots,0)$. В противном случае строки матрицы называются линейно независимыми.

Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов.

Метод окаймляющих миноров

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы A состоит в следующем:

1) Найти какой-либо минор M_1 первого порядка (т.е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$ и т.д.

3) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет или они все равны нулю, то $r(A) = k$-1; если есть хотя бы один такой минор $M_к \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k-го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{к-1} \neq 0$.

ТЕМА 4. Обратная матрица

Определение обратной матрицы. Условие существования

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A n-го порядка, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица n-ого порядка.

Условие существования обратной матрицы. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\det A \neq 0$.Если обратная матрица существует, то она единственная.

Вычисление обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений

Задана квадратная матрица 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Для вычисления обратной матрицы методом алгебраических дополнений:

1. Вычисляем определитель матрицы A. Если $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную.

2. Составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

3. Находим транспонированную матрицу:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

4. Разделив матрицу $\tilde{A}^T$ на определитель, получаем искомую обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

5. Проверяем, что $A \cdot A^{-1} = E$, и записываем ответ.

Аналогично вычисляется обратная матрица для невырожденной матрицы любого порядка.

Матричные уравнения

1. Рассмотрим матричное уравнение

$$A \cdot X = B,$$

где A – квадратная невырожденная ($\det A \neq 0$) матрица порядка n, B – матрица размера $n \times m$ и X – неизвестная матрица.

Так как матрица A – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения слева (операция умножения матриц некоммутативна) на матрицу A^{-1}. По определению обратной матрицы, получим

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, искомое решение матричного уравнения определяется формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Отметим, что количество строк матрицы B должно быть равно порядку матрицы A.

2. Рассмотрим матричное уравнение

$$X \cdot A = B,$$

где A – квадратная невырожденная ($\det A \neq 0$) матрица порядка n, B – матрица размера $m \times n$ и X – неизвестная матрица.

Так как матрица A – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения справа на матрицу A^{-1}. По определению обратной матрицы, получим

$$X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

Таким образом, искомое решение матричного уравнения:

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Отметим, что количество столбцов матрицы B должно быть равно порядку матрицы A.

ТЕМА 5. Система *n*-линейных уравнений с n неизвестными (СЛУ)

Основные понятия

<u>Системой линейных алгебраических уравнений</u> называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots, n$ называются <u>коэффициентами системы</u>, b_i – <u>свободными членами</u>, x_n – неизвестные.

Систему (1) можно записать в <u>матричной форме</u>

$$A \cdot X = B.$$

A – матрица коэффициентов системы, называемая <u>основной матрицей</u>:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} -$$ вектор-столбец из неизвестных x_j,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} -$$ вектор-столбец из свободных членов b_i.

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \dots$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Две системы называются эквивалентными, если они имеют одно и то же общее решение.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены в системе (1) равны нулю.

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется нулевым или тривиальным.

Матричный способ решения СЛУ

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется <u>определителем системы</u>. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется <u>невырожденной.</u>

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot$В. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (2)$$

Отыскание решения системы по формуле (2) называется <u>матричным способом</u> решения системы.

Матричное равенство (2) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (3)$$

называются **формулами Крамера.**

ТЕМА 6. Произвольная система линейных уравнений (*m*-уравнений с *n* неизвестными)

Решение систем линейных уравнений

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица системы.

<u>Расширенной</u> матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Ответ на вопрос о совместности системы дает <u>теорема Кронекера-Капели.</u>

<u>Теорема.</u> Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы вытекают из следующих теорем.

<u>Теорема.</u> Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

<u>Теорема.</u> Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A)\neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют главными и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют свободными и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных.

Таким образом, можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений (1). Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $k \le n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,k$. Коэффициенты a_{ii} называются главными элементами системы. Если в процессе приведения системы (1) к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. В последнем уравнении системы (2) выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1},\ldots,x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1},\ldots,x_n)$, затем находим $x_{k-2},\ldots,x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1},\ldots,x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k=n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2},\ldots,x_1)$.

На практике удобнее работать не системой (1), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Удобно, чтобы коэффициент $\boldsymbol{a_{11}}$ был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $\boldsymbol{a_{11}} \neq 1$).

ТЕМА 7. *n*-мерное векторное пространство

Определение *n*-мерного вектора

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$, где x_i – i-я компонента вектора x (i=1, …, n).

Векторы $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ равны, т.е. $x = y$, если $x_i = y_i$, (i=1, 2, …, n).

Произведением вектора $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ на число λ называется вектор $u=\lambda x$, если $u_i = \lambda x_i$ ($i = 1,2,\ldots,n$).

Суммой двух векторов $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ называется вектор $z = x + y$, если $z_i = x_i + y_i$ ($i = 1,2,\ldots,n$).

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1. $x + y = y + x$ – коммутативное (переместительное) свойство суммы;
2. $(x+y)+z=x + (y +z)$ – ассоциативное (сочетательное) свойство суммы;
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ – ассоциативное относительно числового множителя свойство;
4. $\alpha(x+y)=\alpha x+\beta y$ – дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство;
5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ – дистрибутивное относительно суммы числовых множителей свойство.

Понятие *n*-мерного векторного пространства

Векторным (линейным) пространством называется множество векторов (элементов) с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножение вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше свойствам (рассматриваемым как аксиомы).

Линейная зависимость и независимость векторов

1. Вектор a_m называется линейной комбинацией векторов $a_1,a_2,\ldots,a_{m-1}$, если $a_m = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 +\ldots+\lambda_{m-1} a_{m-1}$, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1}$ – какие-то числа.

2. Векторы $a_1,a_2,\ldots,a_m$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 +\ldots+\lambda_{m-1} a_m = 0. \qquad (1)$$

Если равенство (1) выполняется только при $\lambda 1 = \lambda 2 =\ldots= \lambda m = 0$, то векторы $a_1,a_2,\ldots,a_m$ называются линейно независимыми.

3. Размерность пространства – максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Базисом n-мерного пространства называется совокупность n линейно независимых векторов.

Разложение вектора x по базису ($e_1, e_2, \ldots, e_n$):

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора.

Евклидово пространство

Евклидовым пространством называется линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее определенным свойствам.

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число

$$(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Скалярное произведение имеет свойства:

1. $(x,y) = (y,x)$
2. $(x,y+z) = (y,x) + (x,z)$
3. $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$
4. $(x,x) > 0$, если x-ненулевой вектор; $(x,x) = 0$, если x – нулевой вектор.

Длиной (нормой) вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} .$$

Имеют место следующие свойства длины вектора:

1. $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$, где λ – действительное число;
3. $|(x,y)| \le |x|\,|y|$ (неравенство Коши-Буняковского);
4. $|x + y| \le |x| + |y|$ (неравенство треугольника).

ТЕМА 8. Линейные операторы

Определение

Если задан закон, по которому каждому вектору x nпространства R^n ставится в соответствие единственный вектор y пространства. R^m, то говорят, что задан оператор $A(x)$, действующий из R^n в R^m: $y = A(x)$. Рассматриваем случай, когда пространства R^n и R^m совпадают.

Оператор A называется линейным, если для любых векторов x и y пространства R^n и любого числа λ верны соотношения:

$$A(x + y) = A(x) + A(y),$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Вектор $y = \mathrm{A}(x)$ называется образом вектора x, а сам вектор x – прообразом вектора y.

Связь между вектором x, и его образом $y = A(x)$ может быть представлена в виде: $y = Ax$, где A – матрица линейного оператора; $x = (x_1, x_2,\dots,x_n)'$, $y = (y_1, y_2,\dots,y_n)'$ – векторы, записываемые в виде вектор-столбцов.

Действия над линейными операторами

Сумма и произведение линейных операторов, а также произведение линейного оператора на число определяются равенствами:

$$(\tilde{A}+\tilde{B})(x) = \tilde{A}(x)+\tilde{B}(x),$$

$$(\tilde{A}\tilde{B})(x) = \tilde{A}(\tilde{B}(x)),$$

$$\lambda\tilde{A}(x) = \lambda(\tilde{A}(x)).$$

Нулевым $O(x)$ и тождественным $E(x)$ называются операторы, действующие по правилу: $O(x) = 0$, $E(x) = x$.

Матрицы A и A^* линейного оператора $\tilde{A}$ в базисах $(e_1,\ e_2,\ \dots\ ,e_n)$ и $(e_1^*, e_2^*,\dots, e_n^*)$ связаны соотношением:

$$A^* = C^{-1}AC,$$

где C – матрица перехода от старого базиса к новому.

Собственные векторы и собственные значения оператора (матрицы)

1. Вектор $x \neq 0$ называется собственным вектором линейного оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A), если найдется такое число λ, что

$$\tilde{A}(x) = \lambda x \qquad \text{или} \qquad Ax = \lambda x. \qquad (1)$$

Число λ называется собственным (характеристическим) значением (числом) оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A), соответствующим вектору x.

Определение (1) может быть записано в виде:

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

2. Характеристическим уравнением оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A) называется уравнение:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где определитель $|A - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A).

Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

3. Матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе, состоящем из его собственных векторов с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_n$, является диагональной:

$$A^* = diag(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n).$$

И обратно. Если матрица A линейного оператора $\tilde{A}$ в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса – собственные векторы оператора $\tilde{A}$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$.

ТЕМА 9. Квадратичные формы

Определение

Квадратичной формой F, зависящей от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется функция вида

$$F = a_{11}\,x_1^2 + 2a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{22}\,x_2^2 + \dots + a_{nn}\,x_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,, \,,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1, \dots, n)$ — вещественные числа.

Симметричная матрица $A = (a_{ij})$ $(i,j = 1, \dots, n)$ называется матрицей квадратичной формы F.

Если переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ интерпретировать как координаты переменного вектора x в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ n-мерного евклидова пространства, то матрица A есть матрица некоторого самосопряженного оператора $\hat{A}$ в этом базисе. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = (\hat{A}x, x).$$

Действительно, пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$ и его образ $y = \hat{A}x$. Тогда i-я координата образа $y_i = (\hat{A}x)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Подставляя это выражение в формулу для скалярного произведения в ортонормированном базисе, получим

$$(\hat{A}x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = F$$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Если рассматривать матрицу квадратичной формы как матрицу некоторого самосопряженного оператора, то, очевидно, ее вид будет зависеть от выбора базиса.

Базис, в котором квадратичная форма F имеет вид:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i')^2 \qquad (1)$$

называется каноническим базисом, а выражение (1) – каноническим видом квадратичной формы.

У всякого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (среди которых могут быть равные). В этом базисе

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ квадратичная форма относительно новых переменных $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ имеет канонический вид.

Замечание. Одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами, поэтому канонический вид определен неоднозначно.

Теорема. Квадратичную форму $F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ можно привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Если $Rg\, A = n$, квадратичная форма называется невырожденной.

Если $Rg\, A < n$, квадратичная форма называется выржденной.

Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденном линейном преобразовании базиса и равен

а) количеству отличных от нуля коэффициентов в любом каноническом виде квадратичной формы;

б) количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы с учетом их кратности.

Закон инерции квадратичных форм.

Число слагаемых с положительными и отрицательными коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы постоянно и не зависит от способа приведения формы к каноническому виду (т.е. от выбора собственного базиса).

ТЕМА 10. Векторы на плоскости и в пространстве

Основные понятия

Геометрическим вектором называется направленный отрезок, который можно перемещать параллельно ему самому.

Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$. Векторы обозначаются также строчными латинскими буквами со стрелками, например, $\vec{a}$.

Длиной (или модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между точками A и B. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается символом $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор нулевой длины называется нулевым и обозначается символом $\vec{0}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$, равный по длине вектору $\overrightarrow{AB}$ и противоположно направленный, называется противоположным и обозначается $-\overrightarrow{AB}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется единичным**.** Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{AB}$, называется ортом вектора $\overrightarrow{AB}$.

Векторы, лежащие на параллельных или совпадающих прямых, называются <u>коллинеарными</u>**.**

Векторы, лежащие в параллельных или совпадающих плоскостях, называются <u>компланарными</u>**.** Если угол между векторами равен $\pi/2$, то векторы называются ортогональными.

Сложение векторов и умножение вектора на число

<u>Суммой векторов</u> $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ с началом в точке A и концом в точке C (правило треугольника) (рис.1).

<u>Произведением вектора $\vec{a}$ и действительного числа α</u> называется вектор $\alpha\cdot\vec{a}$, модуль которого равен $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha < 0$ (рис.2).

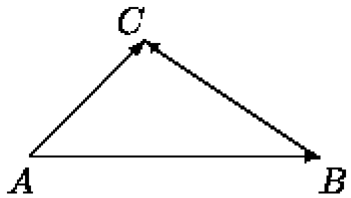


Рис. 1

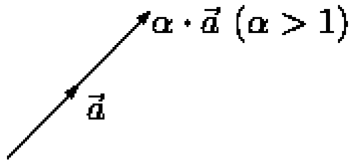


Рис. 2

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются <u>линейными операциями</u>.

Свойства линейных операций с векторами.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых чисел α, β:

1. $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ($\vec{0}$ - нулевой вектор)
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ($-\vec{a}$ — противоположный вектор);
5. $\alpha(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\beta)\cdot\vec{a}$
6. $(\alpha + \beta)\cdot\vec{a} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{a}$
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a} + \alpha\cdot\vec{b}$

<u>Условие коллинеарности векторов</u>: два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. существует число $\alpha \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \alpha\cdot\vec{b}$.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b})$ и равное произведению их модулей и косинуса угла φ между ними, т.е.

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Cos\ \varphi$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любых чисел α, β:

1. $(\vec{b},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b})$
2. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$
3. $(\alpha \cdot \vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\vec{b})$
4. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$

Из определения скалярного произведения следует, что угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой

$$Cos\,\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует условие ортогональности векторов: два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ то

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ – координаты перемножаемых векторов;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который обозначается $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Sin\ \varphi$, где φ-угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку, т.е. из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (рис.1).

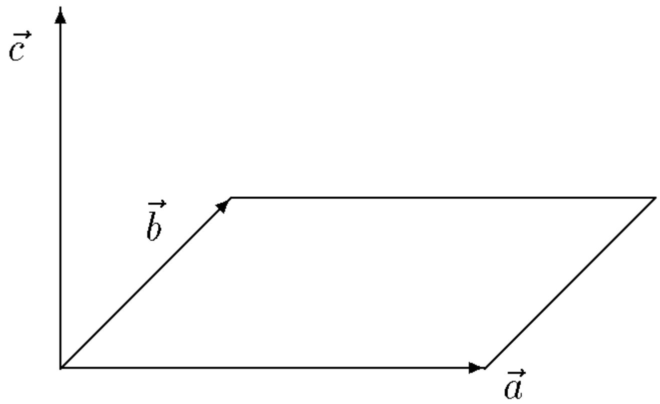


Рис. 1

Замечание. Это определение однозначно определяет векторное произведение ненулевых векторов. Если хотя бы один из сомножителей – нулевой вектор, то векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Из определения векторного произведения следует, что $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ для любого вектора $\bar{a}$.

Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Свойства векторного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых чисел α, β:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
3. $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times b)$;

Условие коллинеарности векторов: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е.

$$\bar{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

(нулевой вектор можно считать коллинеарным любому вектору).

Если заданы координаты перемножаемых векторов, то векторное произведение можно представить в виде:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

<u>Смешанным произведением</u> векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ и определяемое равенством

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

т.е. векторное произведение двух векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ (или, что тоже самое [$\vec{a}$, $\vec{b}$]) умножается скалярно на третий вектор $\bar{c}$ (рис.1).

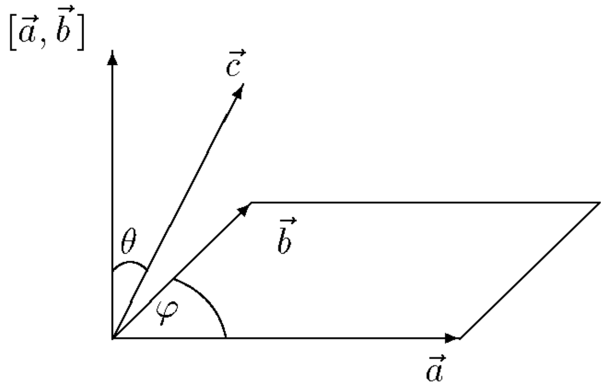


Рис. 1

<u>Геометрический смысл смешанного произведения</u>: смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах, взятому со знаком «+», если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, и со знаком «–», если тройка векторов – левая.

Свойства смешанного произведения векторов

1. <u>Условие компланарности векторов</u>: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;
3. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;
4. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

Если координаты векторов заданы, то смешанное произведение можно представить в виде:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Разложение вектора по базису, линейные операции в координатной форме

Тройка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется базисом в трехмерном пространстве геометрических векторов V_3, если любой вектор $\vec{x} \in V_3$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$$

где α, β, γ — некоторые числа, называемые координатами вектора $\bar{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Справедливы следующие утверждения:

В трехмерном пространстве V_3 любая тройка некомпланарных векторов образует базис.

В двумерном пространстве V_2 любая пара неколлинеарных векторов образует базис.

Из свойств линейных операций с векторами следуют утверждения:

В фиксированном базисе для любых векторов

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{e}_2 + \gamma_1\vec{e}_3$$

$$\vec{y} = \alpha_2\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \gamma_2\vec{e}_3 \text{ имеем}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{e}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{e}_3;$$

$$\lambda\vec{x} = \lambda\alpha_1\vec{e}_1 + \lambda\beta_1\vec{e}_2 + \lambda\gamma_1\vec{e}_3.$$

Т.е. при сложении векторов их координаты складываются, при *умножении вектора на число* его координаты умножаются на это число.

Условие коллинеарности векторов в координатной форме: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

ТЕМА 11. Прямая линия на плоскости. Системы координат на плоскости: декартовы и полярные координаты

Декартова система координат на плоскости определяется некоторой ее точкой *O* и базисом из двух векторов, параллельных плоскости. Точка *O* называется началом координат. Прямые, проведенные через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Они лежат в плоскости и называются осями абсцисс и ординат. Каждая ось координат является числовой осью с началом в точке *O*, положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора.

Координатами точки М называются координаты вектора *OM* (радиус-вектора) (рис. 1 см. ниже).

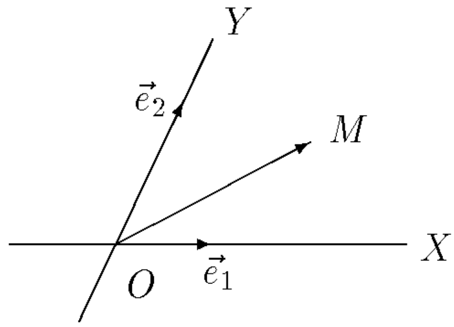


Рис. 1

Если базис ортонормированный, то связанная с ним декартова система координат называется прямоугольной.

На плоскости часто употребляется также полярная система координат (рис. 2).

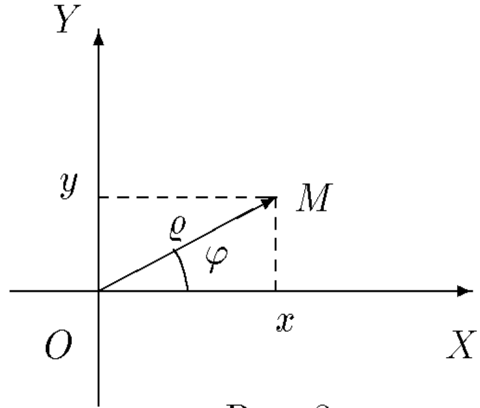


Рис. 2

Она определяется точкой O, называемой полюсом, и лучом, исходящим из полюса, называемым полярной осью. Полярными координатами ρ и φ точки M называются расстояние ρ от полюса до точки M ($\rho = |OM|$) и угол φ между полярной осью и вектором OM (рис. 2). Угол φ называется полярным углом, измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Полярные координаты точки O: $\rho = 0$, угол φ не определен. У остальных точек $\rho > 0$ и угол φ определен с точностью до 2π. Обычно полагают $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$.

Если полюс совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а полярная ось – с положительной частью оси абсцисс, то декартовы координаты x и y точки M выражаются через ее полярные координаты ρ и φ формулами

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi .$$

Полярные координаты ρ и φ точки M выражаются через ее декартовы координаты x и y формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad Cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \quad Sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Прямая на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1-й степени и, обратно, каждое уравнение 1-й степени определяет прямую.

Уравнение вида $Ax + By + Cz = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ называется <u>общим уравнением прямой</u>.

<u>Угловым коэффициентом</u> k прямой называется число $k = tg\alpha$, где α – угол наклона прямой к оси OX $(0 \leq \alpha < \pi)$.

Уравнение $y = kx + b$ называется <u>уравнением прямой с угловым коэффициентом</u> (b – ордината точки пересечения прямой с осью OY).

Уравнение прямой $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ называется <u>уравнением прямой в отрезках</u> (a – абсцисса точки пересечения прямой с осью OX, b – ордината точки пересечения прямой с осью OY).

<u>Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$</u> и <u>$M_2(x_2, y_2)$</u>, имеет вид $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется формулой: $tg\,\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$/

<u>Условие параллельности прямых</u>: $k_1 = k_2$

<u>Условие перпендикулярности прямых</u>: $k_1 k_2 = -1$

ТЕМА 12. Кривые второго порядка

Окружность

<u>Окружностью</u> называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

где $R>0$ – радиус окружности. Это уравнение называется <u>каноническим уравнением окружности</u>, а система координат, в которой окружность описывается каноническим уравнением, называется канонической. В канонической системе начало координат является центром окружности (рис. 1).

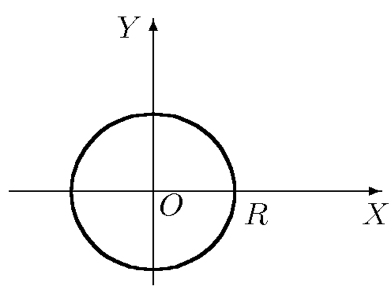


Рис. 1

Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ определяет окружность радиуса R с центром в точке $O'(a, b)$.

Эллипс

Эллипсом называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

где $a>0$, $b>0$ — параметры эллипса. Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, а система координат, в которой эллипс описывается каноническим уравнением, называется канонической.

В канонической системе оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат — его центром симметрии. Следовательно, мы можем ограничиться исследованием функции

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (1)$$

при $x \geq 0$, $y \geq 0$, т.е. рассматривать часть эллипса, лежащую в первой четверти, а затем полученную кривую отразить симметрично относительно осей координат.

Область определения функции (1): $0 \leq x \leq a$, область значений функции(1): $0 \leq y \leq b$, т.е. весь эллипс лежит внутри прямоугольника $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Вычислив производные y' и y'', легко убедиться в том, что функция (1) в интервале $x \in (0, a)$ убывает от b до нуля и ее график является выпуклым вверх (рис.1).

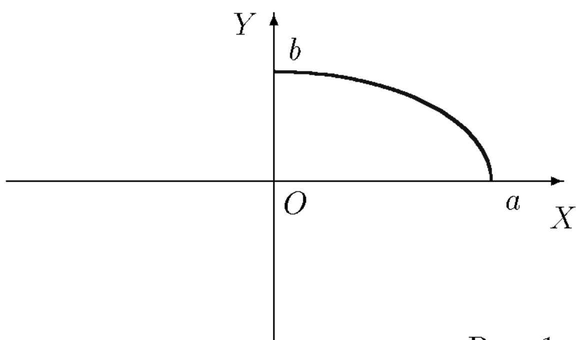


Рис. 1

Отразив полученный график функции (1) симметрично, относительно осей координат, получаем искомый эллипс (рис. 2):

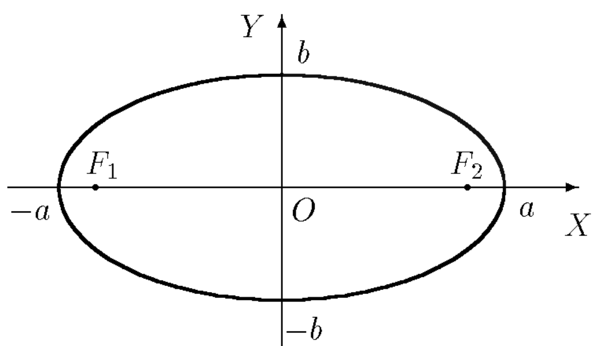


Рис. 2

Точки пересечения эллипса с осями координат $(\pm\ a,\ 0)$ и $(0,\ \pm\ b)$ называются *вершинами эллипса*, а соответствующие отрезки a и b – полуосями эллипса. Пусть $a>b$. Положим:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\ .$$

Точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$ называются фокусами эллипса (если $a<b$, то $c=\sqrt{b^2-a^2}$ и фокусы эллипса расположены на оси OY).

Эксцентриситетом ε эллипса называется отношение расстояния между фокусами 2c к большой оси 2a:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \qquad (\varepsilon<1,\ \text{т.к. } c<a).$$

В частном случае $a = b = R$ (ε=0) эллипс является окружностью с уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Гипербола

Гиперболой называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ ,$$

где $a>0$, $b>0$ — параметры гиперболы. Это уравнение называется каноническим уравнением гиперболы, а система координат, в которой гипербола описывается каноническим уравнением, называется канонической.

Заметим, что в канонической системе оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии. Следовательно, мы можем ограничиться исследованием функции:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (2)$$

при $a \le x< +\infty$, $y \ge 0$, т.е. рассматривать часть гиперболы, лежащую в первой четверти, а затем полученную кривую отразить симметрично относительно осей координат.

Область определения функции (2): $a \le x< +\infty$, область значений функции (2): $0 \le y< +\infty$. Вычислив производные y' и y'' , легко убедиться в том, что функция (2) в интервале $x \in (a, +\infty)$ возрастает от нуля до $+\infty$ и ее график является выпуклым вверх. Прямая $y = bx/a$ является асимптотой гиперболы при $x \to +\infty$ (рис.1 см. ниже).

Отразив полученный график функции (2) симметрично, относительно осей координат, получаем искомую гиперболу (рис. 2 см. ниже):

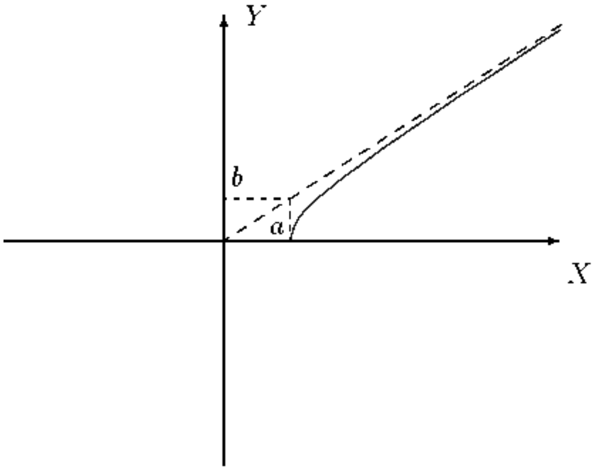


Рис. 1.

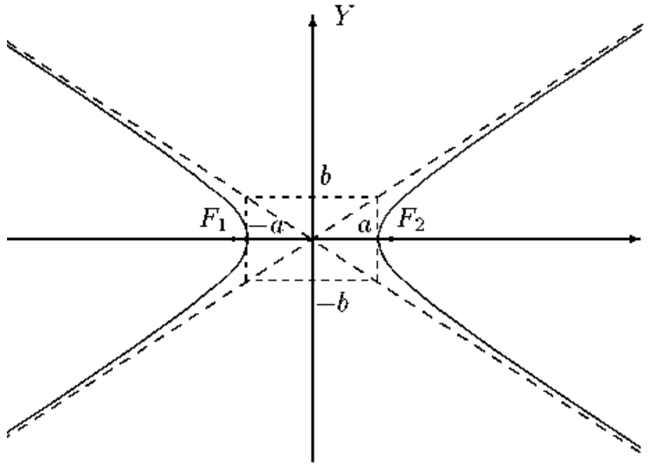


Рис. 2.

Точки пересечения гиперболы с осью OX ($\pm a$, 0) называются вершинами гиперболы (с осью OY гипербола не пересекается), отрезки a и b – полуосями гиперболы (a-действительная, b-мнимая). Положим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Точки F_1 ($-c$, 0) и F_2(c, 0) называются фокусами гиперболы. $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a}$ ($\varepsilon > 1$) – эксцентриситет гиперболы.

Замечания. 1) Если a=$в$, то гипербола называется равносторонней. Ее уравнение принимает вид:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

2) если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

3) уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

где $(x_0; y_0)$ –координаты центра гиперболы.

Парабола

Параболой называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением:

$$y^2 = 2px, \qquad (1)$$

где p>0 – *параметр параболы*. Это уравнение называется каноническим уравнением параболы, а система координат, в которой парабола описывается каноническим уравнением, называется канонической.

Заметим, что в канонической системе ось OX является осью симметрии параболы. Следовательно, мы можем ограничиться исследованием функции

$$y = \sqrt{2px} \qquad (2)$$

при $0 \le x < +\infty$, т.е. рассматривать часть параболы, лежащую в первой четверти, а затем полученную кривую отразить симметрично относительно оси OX.

Область определения функции (2): $0 \le x < +\infty$, область значений функции(2): $0 \le y < +\infty$. Вычислив y' и y'' , легко убедиться в том, что функция (2) в интервале $x \in (0, +\infty)$ возрастает от нуля до $+\infty$ и ее график является выпуклым вверх. Асимптот у параболы нет. Начало координат (0, 0) – <u>вершина параболы</u> (рис. 1).

Отражая график функции (2) относительно оси OX, получаем искомую параболу (рис. 2).

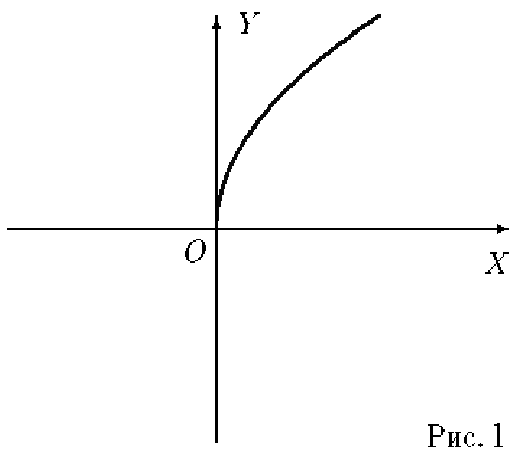


Рис. 1

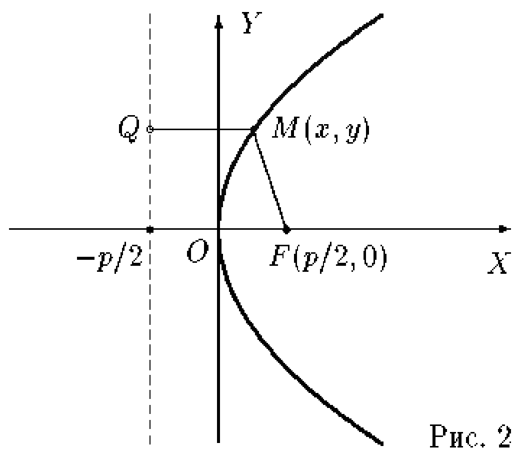


Рис. 2

Прямая $x = -p/2$ называется <u>директрисой параболы</u>, а точка (p/2, 0) – ее <u>фокусом</u>**.**

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ (p>0) также описывают параболы, ветви которых направлены влево, вверх и вниз, соответственно (рис. 3).

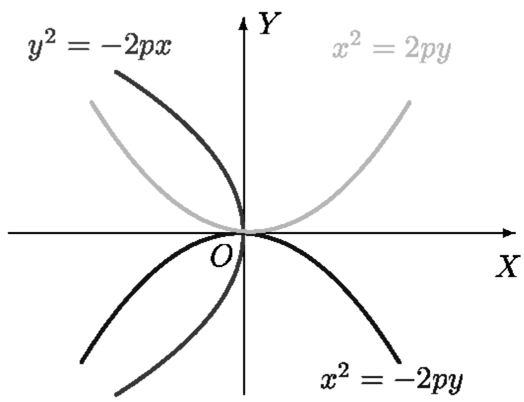


Рис.3

ТЕМА 13. Плоскость

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат. Сформулируем следующую задачу:

Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Решение. Пусть $P(x, y, z)$ – произвольная точка пространства. Точка P принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда вектор $MP = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ортогонален вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (рис.1).

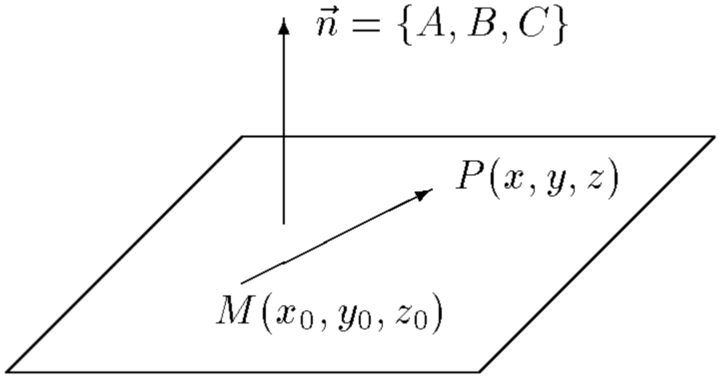


Рис. 1

Написав условие ортогональности этих векторов $(\vec{n}, MP) = 0$ в координатной форме, получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Это и есть искомое уравнение. Вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ называется нормальным вектором плоскости.

Таким образом, чтобы написать уравнение плоскости, нужно знать нормальный вектор плоскости и какую-нибудь точку, принадлежащую плоскости.

Общее уравнение плоскости

Если теперь в уравнении (1) раскрыть скобки и привести подобные члены, получим общее уравнение плоскости:

$$\mathrm{Ax + By + Cz + B = 0} \qquad (2)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz$.

В трехмерном пространстве в декартовой системе координат любая плоскость описывается уравнением 1-ой степени (линейным уравнением). И обратно, любое линейное уравнение определяет плоскость.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

$Ax+By+Cz=0$ ($D=0$) – плоскость проходит через начало координат;

$Ax+By+D=0$ ($C=0$) – плоскость параллельна оси Oz (аналогичный смысл имеют уравнения $Ax+Cz+D=0$, $By+Cz+D=0$);

$Ax+By=0$ ($D=C=0$) – плоскость проходит чрез ось Oz ($Ax+Cz=0$, $By+Cz=0$ – через оси Oy и Ox, соответственно);

$Ax+D=0$ ($B=D=0$) – плоскость параллельна плоскости Oyz ($Cz+D=0$, $By+D=0$ – параллельно плоскости Oxy и Oxz, соответственно);

$Ax=0$, т.е. $x=0$ ($B=C=D=0$) – плоскость совпадает с плоскостью Oyz ($y=0$, $z=0$ – уравнения плоскостей Oxz и Oxy, соответственно).

Уравнение плоскости в отрезках: $x/a+y/b+z/c=1$, где a, b, c – абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения с плоскостью координатных осей Ox, Oy, Oz, соответственно.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Расстояние от точки до плоскости

Поставим следующую задачу:

Найти расстояние d от точки $P(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By+ Cz +D= 0$.

Решение: фиксируем некоторую точку $M(x_1, y_1, z_1)$, , принадлежащую плоскости, и построим вектор MP (рис. 1).

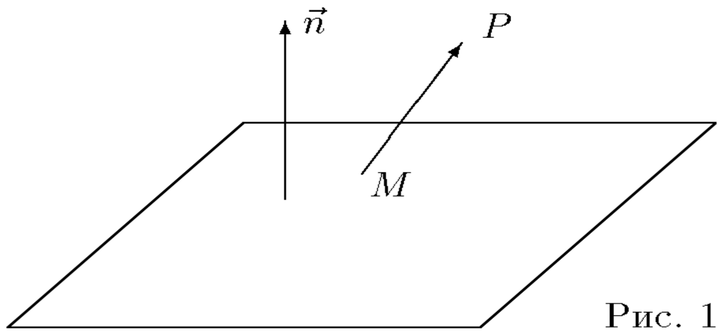


Рис. 1

Искомое расстояние d равно абсолютной величине проекции вектора MP на нормальный вектор плоскости. Получаем:

$$d = \left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{MP}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| \qquad (1)$$

В нашем случае:

$$\vec{n} = \{A, B, C\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{MP} = \{x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1\}.$$

По формуле (1) имеем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ТЕМА 14. Прямая линия в пространстве

Общие уравнения прямой в пространстве

Линия в трехмерном пространстве определяется, вообще говоря, пересечением двух поверхностей, т.е. описывается системой двух уравнений.

Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей и, следовательно, описывать системой двух линейных уравнений

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_2=0 \qquad (1)$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

при условии, что эти плоскости непараллельны, т.е. их нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ неколлинеарны. Эта система уравнений (1) называется **общими уравнениями прямой** в пространстве.

Канонические и параметрические уравнения прямой

Поставим следующую задачу:

Составить уравнения прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному вектору $\vec{a} = \{l, m, n\}$ (вектор $\vec{a}$ называется направляющим вектором прямой).

Решение. Пусть $N(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Построим вектор $MN = [x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0]$ (рис.1).

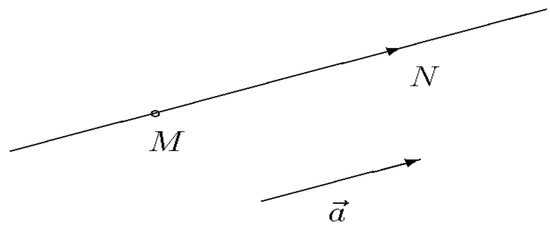


Рис. 1

Очевидно, что точка N принадлежит прямой тогда и только тогда, когда вектор MN коллинеарен вектору $\vec{a} = \{l, m, n\}$, т.е. когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (2)$$

Эти уравнения называются <u>каноническими уравнениями прямой</u> в пространстве.

Если в (2) ввести параметр t $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$, то уравнения прямой можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= x_0+lt \\ y &= y_0+mt \qquad (3) \\ z &= z_0+nt. \end{aligned}$$

Уравнения (3) называются <u>параметрическими уравнениями прямой.</u>

ТЕМА 15. Прямая и плоскость в аффинном пространстве

Угол между прямой (L) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью (Q) $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$Sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Условие параллельности прямой (L) и плоскости (Q) имеет вид:

$$Am+Bn+Cp=0;$$

условие их перпендикулярности:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой:

$$x=x_0+mt$$
$$y=y_0+nt$$
$$z=z_0+pt$$

Координаты точки пересечения находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, y=y_0+nt, z=z_0+pt, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

Условие, при котором прямая (L) лежит в плоскости (Q):

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$$

Если $Am+Bn+Cp\neq0$, то прямая пересекает плоскость; если $Am+Bn+Cp=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ – прямая параллельна плоскости.

ТЕМА 16. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

Системы координат в пространстве: декартовы, цилиндрические и сферические координаты

Декартова система координат в пространстве определяется точкой и базисом из трех векторов. Точка O называется началом координат. Прямые, проведенные через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. В трехмерном пространстве они называются осями абсцисс, ординат и аппликат. Оси координат являются числовыми осями с началом в точке O , положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора. Координатами точки M

называются координаты вектора OM (радиус-вектора) (рис. 1). Если базис ортонормированный, то связанная с ним декартова система координат называется прямоугольной.

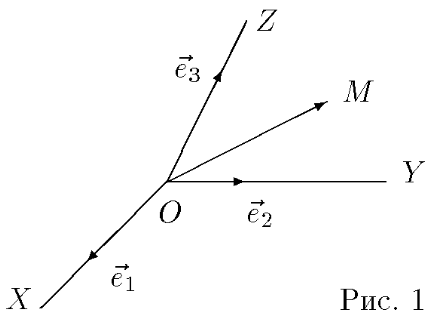


Рис. 1

Поверхностью 2-го порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Цилиндрические и сферические координаты определяются точкой O, исходящим из нее лучом $\boldsymbol{l}$ и единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным $\boldsymbol{l}$ (рис. 2).

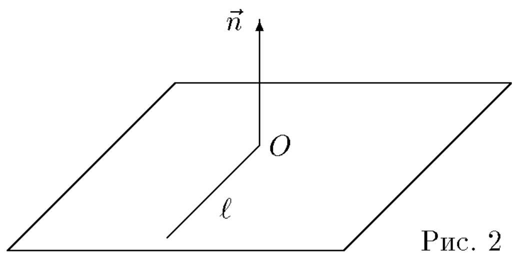


Рис. 2

Проведем через точку O перпендикулярно вектору $\vec{n}$ плоскость P и обозначим проекцию точки M на эту плоскость M' .

В цилиндрических координатах положение точки M определяется числами ρ, φ и z , где ρ и φ – полярные координаты точки M', а z – проекция вектора OM на вектор $\vec{n}$. Пусть точка O совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, луч $\boldsymbol{l}$ – с положительной частью оси абсцисс, а вектор $\vec{n}$ – с положительной частью оси аппликат (рис. 3).

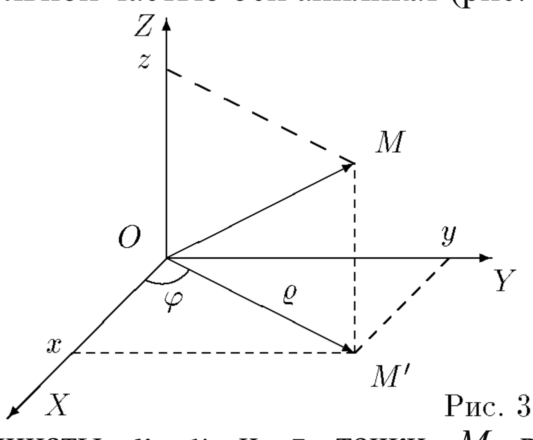


Рис. 3

Декартовы координаты x, y и z точки M выражаются через ее цилиндрические координаты ρ, φ и z по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

В <u>сферических координатах</u> положение точки M определяется числами ρ, φ и θ, где $\rho = |OM|$, φ – полярный угол точки M', а θ – угол между векторами $\vec{n}$ и OM. Мы будем отсчитывать угол θ от вектора $\vec{n}$ по направлению к вектору OM. Угол Θ принимает значения от 0 до π.

Пусть точка O совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, луч $\boldsymbol{l}$ – с положительной частью оси абсцисс, а вектор $\vec{n}$ – с положительной частью оси аппликат (рис. 4), то

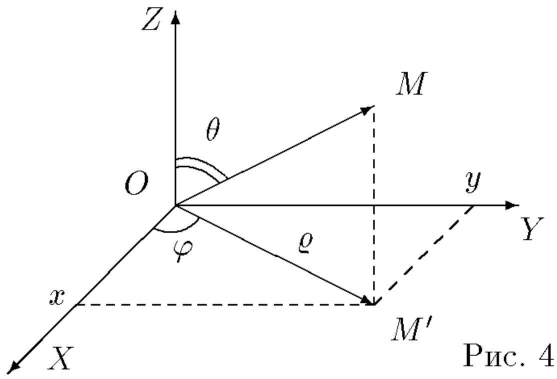


Рис. 4

Декартовы координаты x, y и z точки M выражаются через ее сферические координаты ρ , φ и θ по формулам

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\theta$$

Эллипсоид, сфера

<u>Эллипсоидом</u> называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c>0 — параметры эллипсоида. Это уравнение называется <u>каноническим уравнением эллипсоида</u>, а система координат, в которой эллипсоид описывается каноническим уравнением, называется канонической.

Из уравнения эллипсоида следует, что поверхность симметрична относительно координатных плоскостей, начало координат является центром эллипсоида (рис.1).

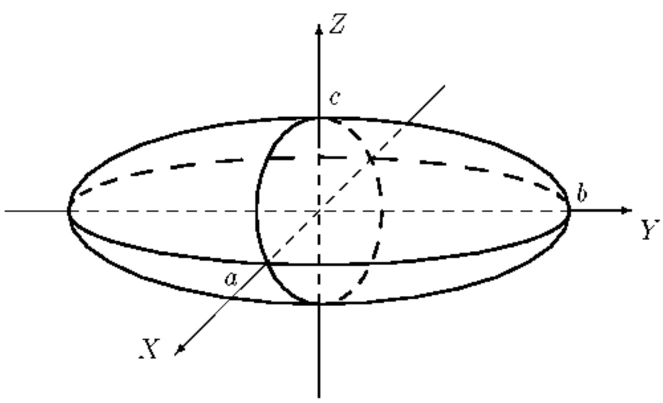


Рис. 1

В частном случае $a = b = c = R$ имеем <u>уравнение сферы:</u>

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Однополостный гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c>0 – параметры гиперболоида (его полуоси см. на рис. 1). Это уравнение называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида, а система координат, в которой гиперболоид описывается каноническим уравнением, называется канонической.

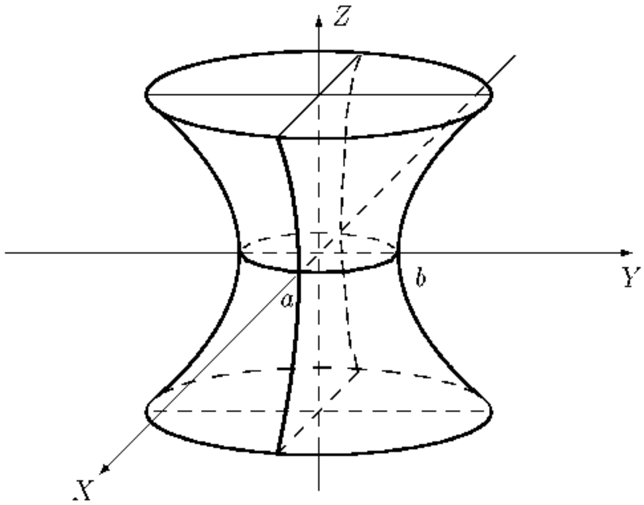


Рис. 1

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z=h$ являются эллипсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x=h$ или $y=h$ являются гиперболами:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}\,\text{или}\;\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением, в котором не фигурирует одна из переменных:

$$F(x, y) = 0,\ F(x, z) = 0 \text{ или } F(y, z) = 0.$$

Свойство цилиндрических поверхностей

Если некоторая точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ принадлежит цилиндрической поверхности, описываемой уравнением $F(x,\ y) = 0$, то все точки прямой, проходящей через эту точку параллельно оси OZ, также принадлежат цилиндрической поверхности. Такие прямые называются образующими цилиндрической поверхности, а кривая, описываемая уравнением $F(x, y) = 0$ и получающаяся в сечении любой плоскостью $z = h$, называется направляющей.

Примеры цилиндрических поверхностей 2–го порядка

Эллиптический цилиндр (рис.1).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

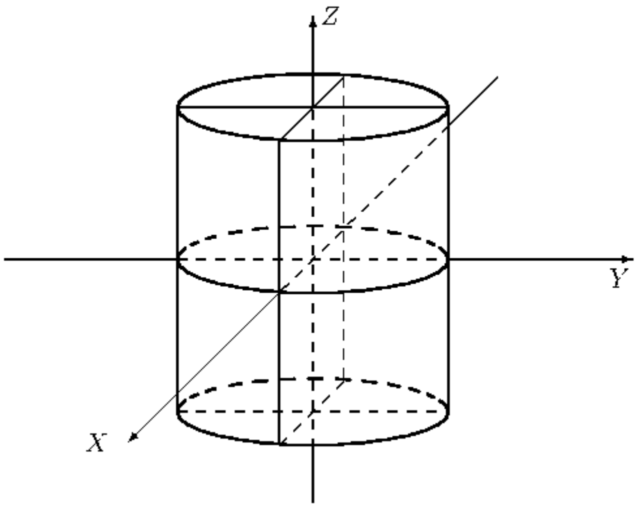


Рис. 1

Если $a = b = R$, то уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ в трехмерном пространстве определяет круглый цилиндр.

Гиперболический цилиндр.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в трехмерном пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ . Направляющей является гипербола с полуосями a и b (рис. 2).

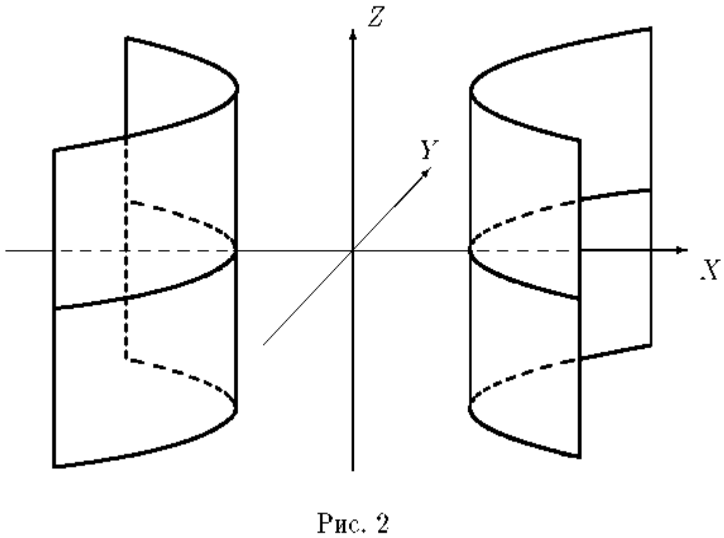


Рис. 2

Параболический цилиндр.

Уравнение $y^2 = 2px$ ($p>0$) в трехмерном пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ . Направляющей является парабола (рис. 3).

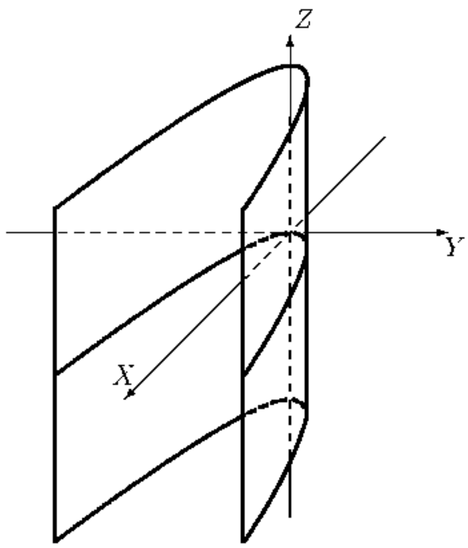


Рис. 3

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТЕМА 1. Множества. Действительные числа. Множества, подмножества

Основные понятия

Под множеством понимается совокупность некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются элементами или точками этого множества.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными. Если a есть элемент множества A, то используется запись $a \in A$. Если $в$ не является элементом множества A, то пишут $в \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется подмножеством множества A и обозначается $B \subset A$.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C = A \cup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, т.е. $D = A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $E = A \setminus B$.

Очевидно, что $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$.

Элементы логической символики

Для сокращения записей используются некоторые простейшие логические символы:

$\alpha \Rightarrow \beta$ – означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ – «предложения α и β равносильны», т.е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ – означает « для любого», «для всякого»;

$\exists$ – «существует», «найдется»;

: – «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ – «соответствие».

Например, запись $\forall x \notin A.\ \alpha$ означает: «для всякого элемента x из множества A имеет место предложение α».

Числовые множества. Множества действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1; 2; 3;\ldots; n;\ldots\}$ –множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2;\ldots;n;\ldots\}$ – множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0; \pm1; \pm2; \ldots;\pm n;\ldots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и $в$ – действительные числа, причем $a < в$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a;в] =\{x : a\le x \le в\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый прмежуток);

$(a; в) =\{x : a< x < в\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a; в) = \{x : a\le x < в\}$;

$(a;в] =\{x : a< x\le в\}$ – полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty;в] = \{x : x \le в\}$; $[a;+\infty) = \{x : x \ge a\}$;

$(-\infty;в) = \{x : x < в\}$; $(a;+\infty) = \{x : x > a\}$;

$(-\infty; \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty \} = R$ – бесконечные интервалы (промежутки).

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;в)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε – окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром, а число ε – радиусом.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 +\varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

Абсолютная величина (модуль) действительного числа

Абсолютной величиной действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, если.....x \ge 0 \\ -x, если.....x < 0 \end{cases}.$$

Очевидно, по определению, что $|x| \ge 0$.

Свойства абсолютных величин:

1. $|x + y| \le |x| + |y|$.
2. $|x - y| \ge |x| - |y|$.
3. $|xy| = |x||y|$.
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Абсолютная величина разности двух чисел $|x - a|$ означает расстояние между точками x и a числовой прямой как для случая $x < a$, так и для $x > a$.

Поэтому, например, решениями неравенства $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$) будут точки x интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, удовлетворяющие неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

ТЕМА 2. Числовые последовательности.
Предел числовой последовательности

Понятие о числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Иными словами, числовая последовательность – это функция натурального аргумента: $x_n = f(n)$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в последовательности $\{x_n\}$ называются членами последовательности. При этом число x_n называется n-ым (энным) или общим членом последовательности. Формулы, позволяющие выразить n-член последовательности через предыдущие члены, называются рекуррентными.

Свойства последовательностей

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется постоянной.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n$: $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно, $\forall n$: $x_n \ge x_{n+1}$). Невозрастающие и неубывающие последовательности объединяют общим термином – монотонные последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если $\forall n$: $x_n < x_{n+1}$, (соответственно, $\forall n$: $x_n > x_{n+1}$). Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим названием – строго монотонные последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (ограниченной снизу), если существует такое число M, что все члены последовательности меньше (соответственно, больше), чем M. Последовательность, ограниченная сверху и снизу одновременно, называется ограниченной.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого $M > 0$ найдется такой ее член x_n, что $|x_n| > M$.

Предел последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такой номер N (как правило, зависящий от ε), что, начиная с этого номера (т.е. для всех $n \geq N$), будет выполнено неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

В случае, если последовательность имеет пределом число a, говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a, и обозначается этот факт так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или } xn \to a \text{ при } (n \to \infty).$$

Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она расходится.

Геометрический смысл предела последовательности состоит в следующем: число a называется пределом последовательности $\{xn\}$, если в любом интервале с центром в точке a находятся почти все (т.е. все, кроме конечного числа) члены этой последовательности.

Операции над пределами последовательностей

Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

В частности:

– постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad c \in R \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot a;$$

– предел натуральной степени от сходящейся последовательности равен этой степени от ее предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n)^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = a^k, \quad к = 1,2,3,\ldots$$

Предел корня к-ой степени от сходящейся последовательности равен корню этой же степени от предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad к = 2,3,4,\ldots \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}.$$

Пределы и неравенства

Пусть все члены данной сходящейся последовательности неотрицательны. Тогда ее предел также неотрицателен:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \geq 0 \ \forall n \quad \Rightarrow a \geq 0.$$

Пусть каждый член одной сходящейся последовательности больше или равен соответствующему члену другой сходящейся последовательности.

Тогда и предел первой последовательности больше или равен пределу второй последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad x_n \geq y_n \ \forall n \quad \Rightarrow \quad a \geq b.$$

Пусть соответствующие члены трех данных последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Тогда если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу:

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Число *e*

Последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ – возрастает и ограничена сверху, а поэтому сходится. Ее пределом является замечательное иррациональное число e=2,71828182845…, служащее основанием натуральных логарифмов.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

ТЕМА 3. Функция одной переменной. Графики элементарных функций

Понятие функции

Если каждому элементу (значению) x множества X поставить в соответствие определенный элемент (значение) у множества $У$, то говорят, что на множестве X задана функция $y=f(x)$; при этом множество X называется областью определения функции y, а множество $У$ – областью значений функции y.

Основные характеристики функции

Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любых значений x из области определения функции $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае $f(x)$ – функция общего вида.

Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$. Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на промежутке X, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$, для всех $x \in X$. В противном случае функция называется неограниченной.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется периодической на этом множестве, если существует такое число $T>0$, что при любом $x\in X$ значение $(x+T)\in X$ и $f(x+T)=f(x)$.

При этом число T называется периодом функции.

Обратная функция

Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения X и множеством значений $У$. Если каждому значению $y\in У$ соответствует единственное значение $x\in X$, то определена функция $x=\varphi(y)$ с областью определения $У$ и множеством значений X. Такая функция $\varphi(y)$ называется обратной к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде:

$$x=\varphi(y)=f^{-1}(y).$$

Про функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Сложная функция

Если функция $y = f(u)$ есть функция переменной u (определенной на множестве U с областью значений $У$), а переменная u, в свою очередь, также является функцией $u = \varphi(x)$ (определенной на множестве X с областью значений U), то заданная на множестве X функция $y=f(\varphi(x))$ называется сложной функцией.

Основные элементарные функции

1) степенная функция $y=x^n$;

2) показательная функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ ($X=(-\infty;+\infty)$; $У=(0;+\infty)$);

3) логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ ($X=(0;+\infty)$; $У=(-\infty;+\infty)$);

4) тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Функции, построенные из основных элементарных функций при помощи конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются элементарными.

Преобразование графиков

1) $y=f(x+a)$ – сдвигает график $y=f(x)$ параллельно оси Ox на $|a|$ единиц, ($a>0$ – влево, $a<0$ – вправо);

2) $y=f(x)+b$ – сдвигает график $y=f(x)$ параллельно оси Oy на $|b|$ единиц, ($b>0$ – вверх, $b<0$ – вниз);

3) $y=cf(x)$ ($c\neq 0$) – растягивает в c раз ($c>1$) или сжимает ($0<c<1$) график $y=f(x)$ относительно оси Oy; при $c<0$ симметрично отображает график относительно оси Ox;

4) $y=f(kx)$ ($k\neq 0$) – сжимает в k раз ($k>1$) или растягивает ($0<к<1$) график $y=f(x)$ относительно оси Ox; при $k<0$ симметрично отображает график относительно оси Oy.

ТЕМА 4. Предел функции одой переменной

Определение предела

<u>Окрестностью</u> точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме самой точки x_0.

Число A называется <u>пределом функции $f(x)$</u> в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ или $f(x)\to A$ (при $x\to x_0$).

Операции над пределами

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x0$ и, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha f(x)=\alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha A$ ($\forall \alpha\in R$)
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (B≠0).

Предел функции на бесконечности

Число A называется <u>пределом функции</u> $f(x)$ при $x\to+\infty$, если при любом значении $\varepsilon>0$ найдется такое число $M>0$, что для всех значений $x>M$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} = A.$

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x\to-\infty$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

Односторонние пределы

Число А называется <u>пределом функции $f(x)$ слева</u> в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что при $x\in(x_0-\delta;x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)\_A|<\varepsilon$. Предел слева записывается так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ или коротко: $f(x_0-0)=A$.

Аналогично определяется предел функции справа, обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$. Пределы функции слева и справа называются <u>односторонними</u> пределами.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}=1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sin\,\alpha x}{x}=\alpha,\qquad \alpha\in R;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются <u>эквивалентными бесконечно малыми,</u> что обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x\to 0$:

$$Sinx\sim x,\quad 1-Cosx\sim\frac{x^2}{2},\quad tgx\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x.$$

Бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x_0$, если для любого числа $M>0$ существует число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ или $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

ТЕМА 5. Непрерывность функции одной переменной

Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если обозначить $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента), $f(x) - f(x0) = \Delta y$ (приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x0$, то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Непрерывность функции на промежутке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Односторонняя непрерывность

Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $(a;x_0]$ и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0;в)$ и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т.е. когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Точки разрыва функции

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке, причем:

а) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ конечны, но не равны между собой, то x_0 – точка разрыва первого рода;

б) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ конечны, равны между собой, но не равны $f(x_0)$, то x_0 – точка устранимого разрыва первого рода;

в) если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен, или не существует то x_0 – точка разрыва второго рода.

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$; $f(x).g(x)$; и $f(x)/g(x)$ (если $g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

2. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(в) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;в]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в ноль: $f(c) = 0$.

ТЕМА 6. Производная и дифференциал функции одной переменной

Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (при условии, что этот предел существует):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке X).

Таблица производных

1. $(c)' = 0$, c=const;
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ (где $\alpha \in R$);
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$; в частности $(e^x)' = e^x$;
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5. $(Sinx)' = Cosx$;
6. $(Cosx)' = -Sinx$;
7. $(tgx)' = \frac{1}{Cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{Sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования

c – постоянная, $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции:

$c'=0$; $x'=1$; $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$;

$(u \pm v)'=u'\pm v'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$;

$(u\cdot v)'=u'v + uv'$; $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0.$;

$(cu)'=cu'$;

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y=f(u)$ – в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда <u>сложная функция $y=f(\varphi(x))$</u> также имеет производную в точке x_0, причем

$$\boldsymbol{y'(x_0)=y'(u_0)\cdot u'(x_0).}$$

Если $y=f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X, то функция <u>обратная к данной</u> $x=\varphi(y)$, также дифференцируема и ее производная определяется соотношением:

$$x_y' = \frac{1}{y_x'}, \qquad y'_x \neq 0.$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда существует <u>касательная</u> к графику этой функции в точке $M_0(x_0;y_0)$, уравнение которой имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

При этом $f'(x_0)=\text{tg}\alpha$, где α–угол наклона этой касательной к оси Ox.

Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой и имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Производная неявной функции

Пусть функция $y=y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x,y)=0.$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав это уравнение (при этом y считается функцией от x), и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

Производные высших порядков

Производная от функции $f'(x)$ называется производной второго порядка от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяются производная третьего порядка (или производная), обозначаемая $f'''(x)$ и т.д.

Производная n-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$

Дифференциал функции

Приращение Δy дифференцируемой функции $y=f(x)$ можно представить в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $f'(x)$ – производная функции $f(x)$; Δx – приращение независимой переменной; $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина.

Дифференциалом (первого порядка) функции $y=f(x)$ называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$.

Поэтому дифференциал функции: $dy = f'(x)dx$.

Геометрический смысл дифференциала

Геометрически приращение Δy функции $f(x)$ в точке x – есть приращение ординаты точки на кривой, а дифференциал dy функции в этой точке – приращение ординаты соответствующей на касательной.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

При достаточно малых значениях Δx приращение функции $\Delta y \approx dy$, т.е.

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Чем меньше значение Δx, тем точнее эта формула.

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2y функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции. Т.е. $d^2y = d(dy)$.

Дифференциалом n-го порядка d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т.е $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

ТЕМА 7. Свойства дифференцируемых функций

Теоремы о среднем

Теорема (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$, дифференцируема на интервале $(a;в)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т.е. $f(a)=f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a;в)$, для которой $f'(c)=0$.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$ и дифференцируема на интервале $(a;в)$. Тогда на интервале $(a;в)$ найдется такая точка c, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;в]$ и дифференцируемы на интервале $(a;в)$, причем $g(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;в)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Таким образом, правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопиталя можно применять также и для раскрытия неопределенностей вида $[0\cdot\infty]$. Для этого произведение $f(x)g(x)$ следует записать в виде $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ (или $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$), получить неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Если имеется неопределенность вида $\left[0^0\right]$ или $\left[\infty^0\right]$, при вычислении предела функции $f(x)^{g(x)}$, то логарифм этой функции представляет собой неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. При этом используется соотношение:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\ln f(x)}.$$

Формула Тейлора. Пусть функция f(x) имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные $f', f'', ..., f^{(n)}$. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$.

Эта формула называется <u>формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.</u> Последнее слагаемое (т.е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Соответствующая формула тогда называется <u>формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.</u>

В случае $x_0=0$ формула Тейлора принимает вид: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x)^n$, при $x\to 0$ и называется <u>формулой Маклорена</u>.

Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$Sinx = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^n),$$

$$Cosx = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n).$$

ТЕМА 8. Исследование функций

Условия монотонности функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a;b)$, то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

Если же $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале $(a;b)$, т.е. $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ из $x_1<x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Экстремум функции

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует интервал, содержащий точку x_0, такой, что для всех x из этого интервала имеет место неравенство $f(x_0) \geq f(x)$, ($f(x_0) \leq f(x)$). Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Необходимое условие экстремума: в точке экстремума функции ее производная либо равна нулю ($f'(x)=0$), либо не существует.

Первое достаточное условие экстремума: если в точке x_0 функция $y=f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 – точка экстремума: максимума, если знак меняется с «+» на «–», и минимума, если с «–» на «+».

Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума: если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)>0$, то x_0 является точкой максимума функции. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)<0$, то x_0 является точкой минимума функции.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на промежутке, если для любых двух значений x_1, x_2 из этого промежутка выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются точками перегиба.

Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) на промежутке, то функция является выпуклой вниз (вверх) на этом промежутке.

Если x_0 – точка перегиба функции $y= f(x)$ и $f''(x_0)$ существует, то $f''(x_0) = 0$.

Если 2-ая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Асимптоты

1. Прямая l называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x,f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

2. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 \pm \infty} f(x)$ (правосторонний или левосторонний) равен $\pm\infty$.

3. Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b.$

4. Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b,$ то прямая $y = kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Общая схема исследования функций и построения графиков

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность – нечетность;
3) найти вертикальные асимптоты;
4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;
5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

ТЕМА 9. Комплексные числа

Основные понятия

Комплексным числом называется выражение вида $z=x+iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица ($i^2=-1$). Число $x=Re(z)$ называется действительной частью числа z, а число $y=Im(z)$ – мнимой частью числа z.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$, равны, если $x_1=x_2$; $y_1=y_2$, $z=0$, если $x=0$, $y=0$.

Числа $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ называются сопряженными.

Арифметические операции над комплексными числами

1. Сложение (вычитание): $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$.

2. Умножение: $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

В частности, $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$.

3. Деление: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$.

Все арифметические операции над комплексными числами проводятся по правилам действий над многочленами x_1+iy_1 и x_2+iy_2, считая $i^2=-1$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z=r(Cos\varphi+iSin\varphi),$$

где $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ – модуль комплексного числа;

φ – аргумент комплексного числа (Arg z)

$$Cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad Sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из значений φ =Arg z выделяется главное значение arg z, удовлетворяющее условию $-\pi \angle \arg z \le \pi$.

Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме

1. Умножение:

$$z_1 z_2 = r_1(Cos\varphi_1 + iSin\varphi_1)\cdot r_2(Cos\varphi_2 + iSin\varphi_2) = r_1 r_2\,[\mathrm{Cos}(\varphi_1+\varphi_2) + i\mathrm{Sin}(\varphi_1+\varphi_2)].$$

2. Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(Cos\varphi_1 + iSin\varphi_2)}{r_2(Cos\varphi_2 + iSin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[Cos(\varphi_1 - \varphi_2) + iSin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

3. Возведение в степень. Формула Муавра:

$$z^n = \left[r(Cos\ \varphi + iSin\ \varphi)\right]^n = r^n(Cosn\ \varphi + iSinn\ \varphi),$$ n-целое число.

4. Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(Cos\varphi + iSin\varphi} = \sqrt[n]{r}(Cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + iSin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}),$$

где k=0, 1, 2, …, n–1.

Показательная форма комплексного числа

$$z = r(Cos\ \varphi + iSin\ \varphi)$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = Cos\varphi + iSin\varphi.$$

Тогда $z = re^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

ТЕМА 10. Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

В записи $\int f(x)dx$ $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Нахождение неопределенного интеграла от некоторой функции называется интегрированием этой функции. Операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$(\int f(x)dx)' = f(x),$$

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx,$$

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx,$ где α–некоторое число;

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Табличные интегралы

$$\int 0dx = C,$$

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ где $n \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ где $a>0$, $a \neq 1$;

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int Sinxdx = -Cosx + C,$$

$$\int Cosxdx = Sinx + C,$$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,$ где $-a<x<a$, $a>0$;

$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C,$ $a \neq 0$;

$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x - a}{x + a} \right| + C,$ $a \neq 0$;

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C,$ $a \neq 0$;

$$\int \frac{dx}{Cos^2 x} = tgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{Sin^2 x} = -ctgx + C.$$

Основные методы интегрирования

а) метод непосредственного интегрирования:

данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или подынтегрального выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

б) <u>метод замены переменной</u>:
пусть $x=\varphi(t)$ – функция дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Эта формула называется <u>формулой замены переменной</u> в неопределенном интеграле.

в) <u>метод интегрирования по частям</u>:
пусть $u=u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула называется <u>формулой интегрирования по частям.</u>

Интегрирование рациональных дробей

<u>Рациональной дробью</u> называется выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и Q(x)–многочлены.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется <u>правильной</u>, если степень многочлена $P(x)$ в ее числителе меньше степени многочлена $Q(x)$ в знаменателе. В противном случае дробь называется <u>неправильной</u>.

Всякая неправильная рациональная дробь с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $P_0(x) -$ многочлен (целая часть при делении), а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} -$ правильная рациональная дробь (остаток).

Поэтому $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int P_0(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx.$

Так как интеграл $\int P_0(x)dx$ вычисляется элементарно (сводится к сумме табличных), то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится, в свою очередь, к интегрированию простейших дробей.

ТЕМА 11. Определенный интеграл

Определенный интеграл как предел интегральной суммы

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,в]$. Разобьем отрезок $[a,в]$ на n элементарных отрезков точками $x_0 = a<x_1<x_2<\ldots<x_n$=b. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где i=1, 2, …, n. Тогда сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

называется интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,в]$.

Пусть существует и конечен предел S интегральной суммы (1) при стремлении к нулю длины максимального элементарного отрезка Δxi, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,в]$ на части и способа выбора точек ξi на отрезках разбиения. Тогда функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на $[a,в]$, а число S – определенным интегралом от $f(x)$ на $[a,в]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2)$$

Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность на рассматриваемом отрезке.

Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, где α – некоторое число.

2) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0.$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

6) Теорема о среднем. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,в]$, то найдется такое значение $\xi\in[a,в]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

7) Если функция $y=f(x)$ – четная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Если функция $y=f(x)$ – нечетная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Формула Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a,в]$ функции $f(x)$ равен приращению любой ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$$ или (в иной записи)

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b .$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$, то

$$\int_{a}^{b} f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,в]$, то

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_a^b - \int_{a}^{b} vdu.$$

Геометрическое приложение определенного интеграла
Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a,в]$, то площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a,в]$ (площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке:

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx$$ (3) (*геометрический смысл определенного интеграла).*

2. Если функция $y=f(x)$ неположительна на отрезке $[a,в]$, то площадь S над кривой $y=f(x)$ на $[a,в]$ равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a,в]$, взятому со знаком «минус»:

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно объединить в одну

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

3. Если $f_2(x)\geq f_1(x)$ на отрезке [а,в], то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на этом отрезке, определяется формулой

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Объемы тел вращения

Если функция $y=y(x)$ знакопостоянна на отрезке [a,$в$], то объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=y(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$, вычисляется по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Приближенное вычисление определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ задана на отрезке [a,$в$] и этот отрезок разбит на n равных частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=$в,

$$x_i=x_{i-1}+ih,$$

где $h=\dfrac{b-a}{n,}$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Тогда приближенное значение определенного интеграла от функции $y=f(x)$ на [a,$в$] может быть найдена по <u>формуле трапеций:</u>

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Погрешность Δот применения формулы трапеций оценивается по формуле:

$$\Delta\leq\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2,$$

где M_2 – максимальное значение модуля второй производной функции $y=f(x)$ на отрезке [a,$в$], т.е.

$$M_2=\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

ТЕМА 12. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода)

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c – произвольное число (обычно c=0).

Несобственные интегралы I рода называются сходящимися, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (1). Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются расходящимися.

Признаки *сходимости и расходимости* несобственных интегралов I-го рода

1. Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a; +\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, который в этом случае называется абсолютно сходящимся.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода)

Пусть функция $y = f(x)$ – непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a,в)$. В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода и, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует и конечен, то этот интеграл называется сходящимся; в противном случае – расходящимся.

Аналогично, если функция $y=f(x)$ непрерывная, но неограниченная на полуинтервале (a;$в$], то, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция $y=f(x)$ терпит разрыв II-го рода во внутренней точке $c \in [a;в]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл называется сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Признаки *сходимости и расходимости* несобственных интегралов II-го рода:

1. Если на промежутке [a;$в$) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x=в$ терпят разрыв II-го рода и удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ («признак сравнения»).

2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке [a;$в$) и в точке $x=в$ терпят разрыв II-го рода. Если существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0< k <\infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3. Если функция $f(x)$, знакопеременная на отрезке [a;$в$], имеет разрыв в точке $x=в$ и несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx.$

ТЕМА 13. Дифференциальные уравнения

Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию некоторой переменной, эту переменную и производные различных порядков данной функции:

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок n старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком этого дифференциального уравнения.

Любая функция $y=y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, называется решением этого дифференциального уравнения. Решение, заданное в неявном виде $f(x, y) = 0$, называется интегралом дифференциального уравнения.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Решение (интеграл) дифференциального уравнения n-го порядка, зависящее от n произвольных независимых постоянных, называется общим решением (интегралом) этого уравнения. Решение (интеграл), полученное при конкретных числовых значениях этих постоянных, называется частным решением (частным интегралом) дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad (1) \text{ или в виде } \qquad M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0,$$

где $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ − некоторые функции переменной x, $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ − функции переменной y.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной y − в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Например, из (1) следует, что

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Выполняя интегрирование, приходим к решению уравнения (1).

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если оно может быть представлено в виде:

$$y' = g(y/x),$$

где g – некоторая функция (одной переменной).

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция $y=f(x,y)$ называется однородной степени k (по переменным x и y), если для произвольного числа α выполняется равенство:

$$f(\alpha x,\alpha y) = \alpha^k f(x, y).$$

Если функция $f(x,y)$ однородная степени 0, то уравнение $y' = f(x,y)$ может быть сведено к однородному.

Замена переменной $z = y/x$, где $z = z(x)$, сводит однородные дифференциальные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно имеет вид:

$$y' + f(x)y = g(x), \qquad (2)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, *в* противном случае – неоднородным.

Будем искать решение в виде:

$$y = u(x)v(x).$$

Так как $y' = u'v + uv'$, то из (2) следует $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или $vu' + u(v' + f(x)v) = g(x)$. (3)

Найдем сначала какое-либо частное решение $v = v(x)$ уравнения:

$$v' + f(x)v = 0.$$

Тогда (см. (3)) функция $u = u(x)$ – решение уравнения $vu' = g(x)$.

Тем самым решение исходного уравнения (2) сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = r(x), \qquad (4)$$

где p и q – некоторые действительные числа, $r(x)$ – некоторая функция.

Если функция $r(x)$ тождественно равна нулю, то соответствующее уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (5)$$

Дифференциальному уравнению (5) ставится в соответствие характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$ где λ – переменная.

1. Если характеристическое уравнение имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Если характеристическое уравнение имеет один корень λ (кратности), то общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}.$$

3. Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, то общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} Sin\beta x + C_2 e^{\alpha x} Cos\beta x.$$

Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Рассмотрим примеры применения дифференциальных уравнений для описания процессов микроэкономической динамики.

Пусть $y = y(t)$ – объем производства некоторого производителя, реализованный к моменту времени t. Предположим, что цена на данный товар остается постоянной (в пределах рассматриваемого промежутка времени). Тогда функция $y = y(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$y' = ky, \qquad (6)$$

где $k = mpl$, m – норма инвестиций, p – продажная цена, l – коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции.

Уравнение (6) является уравнением с разделяющимися переменными. Его решение имеет вид:

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)},$$

где $y_0 = y(t_0)$.

Уравнение (6) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции и т.д.

ТЕМА 14. Ряды

Понятие числового ряда

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{n=1}^{n} u_n.$$

Числа u_1, u_2,… называются членами ряда, член un – общим или n-ым членом ряда, сумма n первых членов ряда $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{nk=1}^{n} u_k$ называется n-ой частичной суммой ряда.

Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Число S называется суммой ряда. Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю (<u>необходимое условие</u> сходимости ряда).

При нарушении необходимого условия сходимости ряда, т.е. если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не существует или если он не равен нулю, ряд расходится. Заметим, что если предел общего члена ряда равен нулю, то вывод о сходимости или расходимости ряда можно сделать только после дополнительного исследования.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

1. <u>Признак сравнения.</u> Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два ряда с положительными членами, и члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. $u_n \leq v_n$ при любом n. Тогда

а) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

в) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2. <u>Предельный признак сравнения</u>. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

3. <u>Признак Даламбера</u>. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения $(n+1)$-го члена к n-ому:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ и при $l=\infty$ ряд расходится. При $l = 1$ для ответа на вопрос о сходимости ряда требуется дополнительное исследование.

4. <u>Интегральный признак сходимости.</u> Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и пусть функция $f(x)$ такая, что $f(1)=u_1, f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n, \ldots$ непрерывна и не возрастает при $x \geq 1$. Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо

и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ при некотором $a \geq 1$.

Сходимость рядов с членами произвольного знака

1. Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд называется условно сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

2. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

3. Ряд называется знакочередующимся, если его члены попеременно то положительны, то отрицательны.

4. Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине т.е. $u_1>u_2>\ldots>u_n>\ldots>0$, и предел модуля его общего члена равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена: $S \leq u_1$.

Определение и свойства степенного ряда

1. Степенным рядом называется ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (1)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – коэффициенты степенного ряда.

2. Областью сходимости степенного ряда называется совокупность тех значений x, при которых степенной ряд (1) сходится.

3. Число R – такое, что при $|x| < R$ ряд (1) сходится, а при $|x| > R$ – расходится, называется радиусом сходимости степенного ряда. Интервал $(-R;R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. При $x=-R$, $x=R$ ряд может как сходится, так и расходится.

4. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (2)$$

Формула (2) применима, если, начиная с некоторого номера n, все $c_n \neq 0$.

ТЕМА 15. Функции нескольких переменных. Основные понятия

Область определения

Если каждому набору n переменных $x_1,\dots, x_n$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной z, то говорят, что задана функция нескольких переменных $z = f(x_1,\dots,x_n)$.

Множество X называется областью определения функции.

Предел функции

Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое что для всех точек (x,y), отстоящих от точки (x_0,y_0) не более, чем на δ, выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Частные производные

Частными производными z = f(x,y) по x и y называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Дифференциал функции

Дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращение независимых переменных

$$dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$$

или $$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

учитывая, что $$dx = \Delta x, dy = \Delta y.$$

Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

1. Точка $M(x_0,y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = f(x,y)$, если существует окрестность точки M, такая, что для всех точек (x,y) из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0,y_0) \ge f(x,y) \qquad (f(x_0,y_0) \le f(x,y)).$$

2. Если в точке максимума или минимума обе частные производные существуют и непрерывны, то они равны нулю в этой точке (необходимое условие экстремума).

3. Если в точке (x_0,y_0) обе частные производные обращаются в ноль, то характер этой точки определяется величиной $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$.

При $\Delta > 0$ имеется экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$).

При $\Delta < 0$ функция в данной точке не имеет экстремума.

При $\Delta = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым (достаточное условие экстремума).

4. Наибольшее (наименьшее) значение функции $z = f(x,y)$ определяется как наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой области из ее значений в критических точках внутри области и на ее границе.

5. Точка $M(x_0,y_0)$ называется точкой условного максимума (минимума) функции $z = f(x,y)$, при условии $g(x,y) = C$, если существует такая окрестность этой точки, что во всех точках (x,y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x,y) = C$, выполняется неравенство:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \qquad (f(x_0,y_0) \leq f(x,y)).$$

Уравнение $g(x,y) = C$ называется уравнением связи.

Точка условного экстремума является точкой экстремума функции $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[g(x,y) - C]$, функция L называется функцией Лагранжа, а λ – множителем Лагранжа.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Методические указания

Организация самостоятельной работы студентов имеет цель:

– систематизировать и расширить их теоретические знания;

– закрепить практические навыки;

– научить работать с учебной и научной литературой, проводить её анализ и делать выводы;

– стимулировать профессиональный рост студентов, воспитывать творческую активность и инициативу.

На первом курсе обучения по разделу «Математика I» выполняются две контрольные работы: №1 – по аналитической геометрии и линейной алгебре и №2 – по основам математического анализа. К выполнению каждой контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала курса по учебникам, предложенным в списке литературы, и решения задач, указанных к каждой теме данного учебного пособия. При выполнении работ следует руководствоваться следующими указаниями.

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студентов, полный шифр, номер контрольной работы и дата ее отправки в институт.

Условия задач следует переписывать полностью, без сокращений. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены (желательно на миллиметровой бумаге) аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. В конце работы следует указать, какие учебники и учебные пособия (включая методические указания) были использованы при выполнении работы.

Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3-4 см.

2. После получения работы (как зачтенной, так и не зачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторную рецензию, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Если будет установлено, что та или иная контрольная работа выполнена несамостоятельно, то она не будет зачтена, даже если в этой работе все задачи решены верно.

4. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

5. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра (номер студенческого билета). При этом последняя цифра ноль (0) соответствует варианту №10.

Варианты контрольной работы 1
(Аналитическая геометрия и линейная алгебра)

Вариант 1

1. В треугольнике с вершинами $A(3;-2)$, $B(5;2)$, $C(-1;4)$ найдите длины всех сторон, длину медианы BD и точку M пересечения медиан.

2. Составьте уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{8}=1$, а фокусы в вершинах эллипса.

3. Из точки $P(2;3;-5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

4. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5. Определить при каких значениях m и n система

$$\begin{cases} 3x-2y+z=n \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+mz=-1 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений.

6. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z-2u=4 \\ 2x+3y-z+u=1 \\ 4x-2y-6z=2 \\ 5x+4y-5z+2u=1 \end{cases}$$

Вариант 2

1. Треугольник задан вершинами: $A(-5;-2)$, $B(7;6)$ и $C(5;-4)$. Найдите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины A; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) центр тяжести этого треугольника.

2. Эллипс проходит через точку $M(1;1)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$. Составить уравнение эллипса.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ и $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

4. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

5. По формулам Крамера решить систему

$$\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=1 \\ 3x+2y-2z=0 \end{cases}$$

6. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y+2z+u=1 \\ x+y+z+u=0 \\ 4x+y+2z=1 \\ 5x+4z+2u=3 \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2;0)$ и $B(0;1)$.

2. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если сумма полуосей равна 25, а фокусы имеют координаты (-5;0) и (5;0).

3. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями,

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$$

4. Вычислить произведения AA^T и $A^T A$, при заданной матрице A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Определить при каких значениях m и n система

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ x-5y+2z=n \\ mx+19y-z=8 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений.

6. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+4z+3u=-1 \\ 2x+3y+5z+3u=2 \\ 3x+3y+6z+5u=-1 \\ 4x+y+2z+2u=2 \end{cases}.$$

Вариант 4

1. Даны три стороны треугольника: $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ и $5x-3y-14=0$. Составить уравнения его высот.

2. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если сумма полуосей равна 25, а фокусы имеют координаты (-5;0) и (5;0).

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$$

параллельно прямой $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=1+2t \end{cases}$.

4. Представить вектор $\vec{d}=(4;12;-3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(5;7;0)$, $\vec{c}=(3;-2;4)$.

5. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x+3y-5z=0 \\ x+y-z=0 \\ 3x+z=-2 \end{cases}.$$

Вариант 5

1. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат.

2. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ и $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

4. Найти значение матричного многочлена

$$f(A)=3A^2-5x+2, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3y+4z+6=0 \\ x+z=1 \end{cases}$$

6. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z + u = 4 \\ 2x - y + 3z - 2u = 1 \\ x - z + 2u = 6 \\ 3x - y + z - u = 0 \end{cases}$$

Вариант 6

1. Даны три стороны треугольника: $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ и $5x-3y-14=0$. Составить уравнения его высот.

2. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(4;6)$.

3. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

4. Представить вектор $\vec{d} = (4;12;-3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = 2;3;1)$, $\vec{b} = 5;7;0)$ и $\vec{c} = (3;-2;4)$.

5. Определить при каких значениях m и n система $\begin{cases} 3x - 2y + z = n \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + mz = -1 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений.

6. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y = 2 \end{cases}.$$

Вариант 7

1. Треугольник задан вершинами: $A(-5;-2)$, $B(7;6)$ и $C(5;-4)$.

Найдите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины A; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) центр тяжести этого треугольника.

2. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 1$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую,

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

параллельно прямой $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

4. Доказать, что векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$ компланарны.

5. Определить при каких значениях m система уравнений

$$x + 2y + (m+3)z = 8$$
$$2x + 3y + (m+4)z = 12$$
$$3x + (6m+5)y + 7z = 20$$

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений.

6. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y - z + 3u = 5 \\ 4x + y + z + 2u = 13 \\ 7x + 4y + 3z + u = 21 \\ 2x + 5y + 3z - 4u = 3 \end{cases}.$$

Вариант 8

1. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2;0)$ и $B(0;1)$.

2. Центр окружности находится в точке $O(-3:1)$. Составить уравнение окружности, если она касается прямой $4x + 3y - 16 = 0$.

3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

4. Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти $\{(\vec{a} - 2\vec{c}) \times \vec{b}\} \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$.

5. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 5y + 6z = 19 \\ 7x + 8y = 1 \end{cases}.$$

6. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4u = -13 \\ -x + z + 2u = -1 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \\ 5x + 6y + 7z - 2u = 19 \end{cases}$$

Вариант 9

1. В треугольнике с вершинами $A(3;-2)$, $B(5;2)$, $C(-1;4)$ найдите длины всех сторон, длину медианы BD и точку M пересечения медиан.

2. Найти уравнение прямой, проходящей через центры окружностей, $x^2+y^2+10x+4y+13=0$ и $x^2+y^2-6x-8y+16=0$.

3. В уравнениях прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{n}$ определить параметр n так, чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

4. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k};\quad \vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2k$.

Вычислить $пр_{\vec{ш}}=(3\vec{a}-2\vec{b})$.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

6. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} -x+4y+5z-4u=-15 \\ x+2y-2z+4u=3 \\ 2x+6y+z=-6 \\ 3x+z+2u=11 \end{cases}.$$

Вариант 10.

1. Даны три стороны треугольника: $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ и $5x-3y-14=0$. Составить уравнения его высот.

2. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

3. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

4. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.

5. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+6y+4z=-6 \\ 3x+10y+8z=-8 \end{cases}$$

6. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 6x-5y+4z+7u=28 \\ 5x-8y+5z+8u=36 \\ 9x-8y+5z+10u=42 \\ 3x+2y+2z+2u=2 \end{cases}.$$

Варианты контрольной работы 2
(Основы математического анализа)

Вариант 1

1. Найти область определения функции:
$y = \sqrt{x} + \lg(2x-5)$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}$

3. Найти y' $y=\dfrac{\ln Cosx}{Cosx}$

4. Вычислить интеграл $\int e^x Cosx \cdot dx$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1/2}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, $y=x^2$ и $x=y^2$

Вариант 2

1. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$

3. Найти $y'(1)$ $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$

4. Вычислить интеграл $\int\dfrac{Sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\dfrac{Sinx\cdot dx}{(1-Cosx)^2}$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, $y=x^2; y=2x; y=x$

Вариант 3

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{x \cdot e^{x}}$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{-x}$

3. Найдите dy $y = (x^3 - x) \cdot tgx$

4. Вычислить интеграл $\int \dfrac{x-2}{x+3} dx$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 (3-2x)e^{-3x} dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями,
$y = x^2 - 6; \quad y = -x^2 - 5x - 6$

Вариант 4

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{5 - \sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5 - x}{3 - \sqrt{2x-1}}$

3. Найдите $y'\left(\pi/2\right)$ $y = Sinx \cdot e^{Cosx}$

4. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{x \cdot Sin^2 \ln x}$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x^2 \ln x \cdot dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, $y = x^2; \; x = y^2$

Вариант 5

1. Найти множество значений функции $y = 1 - 3Cosx$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{x}$

3. Найдите y'' $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$

4. Вычислить интеграл $\int Sin^2 3x \cdot dx$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, $y = x^2; \; y = 2x$

Вариант 6

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$

2. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot ctg\ \pi x)$

3. Найдите y'' $\quad y = \dfrac{1}{4x-1}$

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt[3]{2}} 3e^{x^3} x^2 dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, $y = -x^2 + 4$; y=0.

Вариант 7

1. Установить четность или нечетность функции $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$

2. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x \to 0} (Sinx)^x$

3. Найдите dy $\quad y = \ln^3 Sinx$

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int (2x-5)e^{-3x} dx$

5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{Cosx \cdot dx}{\sqrt{2Sinx+1}}$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями,
   $y = x^2 + 1;\quad y = 0;\quad x = 1;\quad x = 4$

Вариант 8

1. Установить четность или нечетность функции $y = x\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$

2. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x \to 0} (1 - Cosx) \cdot ctgx$

3. Найдите $y'(1)$ $\quad y = \sqrt{e^x} \cdot \ln x^2$

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, $y = x^2 + 2;\ \ y = 6$

Вариант 9

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}} - 7Cos2x$

2. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

3. Найдите y' $\quad y = arctg\dfrac{\ln x}{3}$

4. Вычислить интеграл $\int xe^x dx$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_e^4 x \cdot \ln x dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = Sinx; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \pi$

Вариант 10

1. Найти множество значений функции $y = 2^{x^2}$

2. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x \to 0} (Cosx)^{1/x^2}$

3. Найдите y' $\quad y = (2 - x^2)Sinx + 2xCosx$

4. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \dfrac{4xdx}{(x^2 - 1)^3}$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями,

$y = -x^2 + 4; \quad y = 0$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Тестовые задания для промежуточного контроля студентов «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Вопрос 1. Найти $C=2A-3B^T$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

Ответы: а) $\begin{pmatrix}-4 & 5 & -4\\ 0 & 1 & -8\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 5 & 1\\ -4 & -8\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}8 & -13 & 20\\ 0 & 7 & 28\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}4 & -5 & 4\\ 0 & -1 & 8\end{pmatrix}$

Варианты ответов

1. а
2. б
3. в
4. г

Вопрос 2. Найти AB, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\\ 4 & -6\end{pmatrix}$

Ответы:

а) $\begin{pmatrix}24 & -26\\ 32 & -26\end{pmatrix}$**; б)** $\begin{pmatrix}2 & -4 & 8\\ -3 & 4 & -7\\ 4 & -20 & 46\end{pmatrix}$**; в)** $\begin{pmatrix}24 & -22\\ -26 & 28\end{pmatrix}$**; г)** $\begin{pmatrix}24 & -26\\ -22 & 28\end{pmatrix}$

Варианты ответов

1. а
2. б
3. в
4. г

Вопрос 3. Чему равно данное выражение $(AB)^T$?

Ответы:

а) A^TB^T; б) $(BA)^T$; в) B^TA^T

Варианты ответов

1. а
2. б
3. в

Вопрос 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-3 & 7\\ -6 & 8\end{vmatrix}$

Варианты ответов

1. 18
2. 68
3. - 68
4. - 18

Вопрос 5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{23} ее определителя.

Варианты ответов

1. 9
2. -21
3. -6
4. другой ответ

Вопрос 6. Вычислить определитель данной матрицы:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов 1) 41; 2) 52; 3) другой ответ

Вопрос 7. Вычислить определитель данной матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов

1. -24
2. 24
3. другой ответ

Вопрос 8. Даны матрицы А и В. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Выяснить, какие из следующих операций можно выполнить:
a) $A+B$; b) A^T+B; c) $A+B^T$; d) AB; e) BA; f) A^TB; g) B^TA^T

Варианты ответов

1. a)
2. b)
3. c)
4. d)
5. e)
6. f)
7. g)

Вопрос 9. Как возвести матрицу в третью степень?

Варианты ответов

1. Умножить матрицу на матрицу, а затем полученную матрицу умножить на исходную матрицу
2. Возвести в третью степень каждый элемент матрицы
3. Умножить матрицу на матрицу, а затем исходную матрицу умножить на полученную матрицу

Вопрос 10. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Соответствующие числа a, b, c, d найдите в вариантах ответов.

Варианты ответов

1. 4, 5, 2, 2
2. 4, 2, 5, 2
3. -4, -5, -2, -2
4. -4, -2, -5, -2

Вопрос 11. Матрица-строка размером:

Варианты ответов

1. $1 \times n$
2. $m \times 1$
3. $1 \times m$

Вопрос 12. Каким свойством не обладает произведение матриц?

Варианты ответов

1. $AB=BA$

2. $(AB)C=A(BC)$

3. $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$

Вопрос 13. При умножении матрицы на обратную ей получаем:

Варианты ответов

1. нулевую

2. транспонированную

3. единичную

Вопрос 14. Какая система называется однородной?

Варианты ответов

1. содержащая одинаковые уравнения

2. у которой свободные члены равны 0

3. у которой количество уравнений совпадает с числом переменных

Вопрос 15. Метод исключения переменных это:

Варианты ответов

1. метод Гаусса

2. метод Крамера

3. матричный метод.

Вопрос 16. По формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В ответе указать значение суммы переменных x_1, x_2 и определителя Δ

Варианты ответов

1. 7
2. 9
3. 5

Вопрос 17. Каким методом можно решить система уравнений, если определитель системы=0?

Варианты ответов

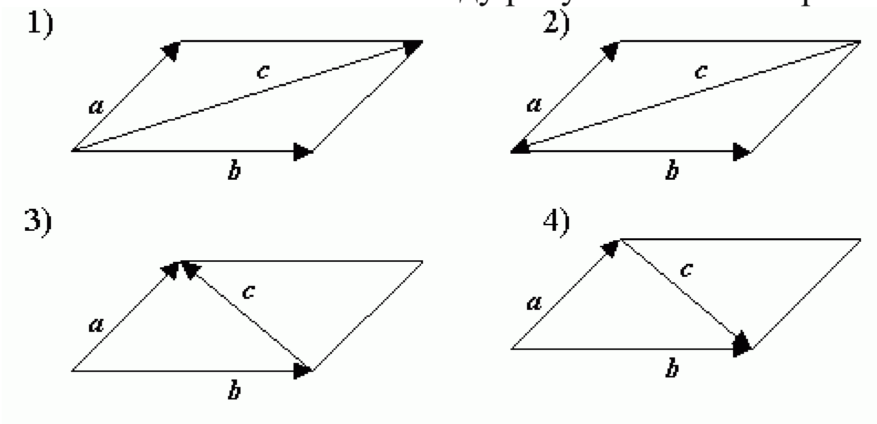
1. методом Гаусса
2. методом Крамера
3. матричным методом.

Вопрос 18. Назовите вид системы векторов, если третий вектор равен сумме двух других векторов.

Варианты ответов

1. линейно зависимая
2. линейно независимая
3. линейно независимая при условии
4. может быть любого вида

Вопрос 19. Установить соответствие между рисунками и векторным равенством



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

Варианты ответов

1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)

Вопрос 20. Определить длину вектора $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \angle(\vec{a},\vec{b})=120°$

Варианты ответов

1. 12
2. $12\sqrt{3}$
3. 24

Вопрос 21. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}, \vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

Найти с точностью до 0,1 проекцию вектора $(\vec{b}+\vec{c})$ на направление вектора $(\vec{a}+\vec{b})$

Варианты ответов

1. 4,7
2. 2,5

3. другой ответ

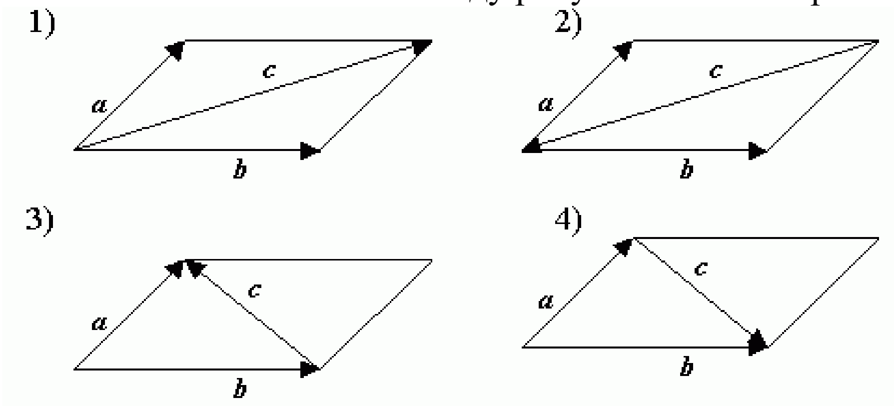
Вопрос 22. Выяснить, какие из приведенных троек векторов образуют базис в трехмерном пространстве

1. (0; 0; 1), (0; 1; 0), (0; 1; 1),
2. (0; 0; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0),
3. (1; 1; 1), (0; 1; 0), (2; 2; 2),

Варианты ответов

1. 1
2. 2
3. 3

Вопрос 23. Установить соответствие между рисунками и векторным равенством



$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Варианты ответов

1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)

Вопрос 24. Два вектора коллинеарны, если:

Варианты ответов

1. Их векторное произведение равно 0
2. Их скалярное произведение равно 0

Вопрос 25. Найти координаты точки (x_0; y_0) пересечения медиан треугольника *ABC*, где

A(2; 4), *B*(-3; 0), *C*(7; -1)

Варианты ответов

1. (2; 1)
2. (3; 4)
1. (1; 2)

Вопрос 26. Найти в градусах острый угол между прямыми $4x$-$2y$-7=0 и $y = \frac{1}{3}x - 11 = 0$

Варианты ответов

1. 45
2. 60
3. 30

Вопрос 27. Какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x - y+3=0$

1) $4x+8y+17=0$; 2) $4x-8y-11=0$, 3) $y=-\frac{1}{2}x+5=0$; 4) $y=-2x-7$; 5) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1$

Варианты ответов

1. 1), 3), 5)
2. 2), 4)
3. 1), 3)

Вопрос 28. $A(-4; 3)$, $B(2; 5)$, $C(6; -2)$ – вершины треугольника ABC. Составить уравнение высоты $4x+by+c=0$, проведенной из вершины A

Варианты ответов

1. $b= -7$, $c=37$
2. $b= 7$, $c=37$
3. $b= -7$, $c=-5$

Вопрос 29. Найти расстояние между параллельными прямыми
$y = - 0,75x - 6$ и $3x + 4y - 12 =0$

Варианты ответов

1. 7,2
2. 2,4
3. другой ответ

Вопрос 30. Выяснить, в каком случае плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ параллельны.

Варианты ответов

1. $\frac{A_1}{A_1}=\frac{B_2}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
2. $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

Вопрос 31. Выяснить, в каком случае плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ перпендикулярны.

Варианты ответов

1. $\frac{A_1}{A_1}=\frac{B_2}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
2. $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

Вопрос 32. Выяснить, в каком случае плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ параллельны?

Варианты ответов

1. $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0$
2. $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

Вопрос 33. Выяснить, в каком случае плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярны?

Варианты ответов

1. $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0$
2. $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$

Вопрос 34. Найдите длину *AB*, если *A*(2; 0) и *B*(5; 4)

Варианты ответов

1. 5
2. 33
3. $5\sqrt{13}$

Вопрос 35. Найдите координаты середины отрезка *AB*, если *A*(5; 3) и *B*(-1; 5)

Варианты ответов

1. (2; 4)
2. (3; -1)
3. (-3; 1)

Вопрос 36. Лежит ли точка *A*(2; -4) на линии x^2-y = 0

Варианты ответов

1. Да
2. Нет

Вопрос 37. Найдите координаты точки делящей отрезок, заданный точками *A*(-1; -3) и *B*(5; 3) в отношении 2 : 1

Варианты ответов

1. (3; 1)
2. (1; 3)
3. (2; 0)

Вопрос 38. Условие параллельности прямых:

Варианты ответов

1. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$
2. $k_1 = k_2$
3. $k_1 \neq k_2$

Вопрос 39. Написать уравнение окружности, касающейся оси *Ox* в начале координат и проходящей через точку *A*(0; -8)

Варианты ответов

1. $x^2 + (y+4)^2 = 16$
2. $x^2 + y^2 = 64$
3. $(x+4)^2 + y^2 = 16$

Вопрос 40. Какую кривую второго определяет уравнение

$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 40$

Варианты ответов

1. окружность
2. гиперболу
3 параболу
4. эллипс

Вопрос 41. Указать каноническое уравнение эллипса, если даны его полуоси $a = 3$, $b = 4$

Варианты ответов

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Вопрос 42. Какую кривую второго определяет уравнение
$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$

Варианты ответов

1. окружность
2. гиперболу
3. параболу
4. эллипс

Вопрос 43. Найти расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{24} = 1$

Варианты ответов

1. $4\sqrt{10}$
2. $2\sqrt{10}$
3. $4\sqrt{22}$
4. $2\sqrt{22}$

Вопрос 44. Найти расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

Варианты ответов

1. 20
2. 10
3. $2\sqrt{7}$
4. $4\sqrt{7}$

Вопрос 45. Множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами, есть:
1) прямая линия, 2) окружность, 3) гипербола. 4) парабола, 5) эллипс.

Варианты ответов

1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)
5. 5)

Вопрос 46. Множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус, есть:
1) прямая линия, 2) окружность, 3) гипербола. 4) парабола, 5) эллипс.

Варианты ответов

1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)
5. 5)

Вопрос 47. Множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами, есть:
1) прямая линия, 2) окружность, 3) гипербола. 4) парабола, 5) эллипс.

Варианты ответов

1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)
5. 5)

Вопрос 48. Какое уравнение не определяет эллипс?

Варианты ответов

1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$
3. $4x^2+9y^2=36$

Вопрос 49. Парабола $x^2=2py$ симметрична относительно:

Варианты ответов

1. оси ординат
2. оси абсцисс
3. начала координат

Вопрос 50. Найти радиус окружности $x^2-10x+y^2-8y+32=0$

Варианты ответов

1. 3
2. $4\sqrt{2}$
3. $\sqrt{73}$

Тестовые задания для промежуточного контроля студентов
«Основы математического анализа»

Вопрос 1. Выяснить, какие из данных функций являются сложными:

1) $y = \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{3}}$, 2) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x$, 3) $y = arcsin\, x$, 4) $y = arcsin\,(3x)$

Варианты ответов

1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)

Вопрос 2. График нечетной функции симметричен относительно:

Варианты ответов

1. начала координат
2. оси абсцисс
3. оси ординат

Вопрос 3. Область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$:

Варианты ответов

1. (5; +∞)
2. (-∞; 5) U (5; +∞)
3. [5; +∞)

Вопрос 4. Выяснить, какие из функций являются монотонным при $x \in (-\infty;+\infty)$

Варианты ответов

1. $y = x^2$
2. $y = x^3$
3. $y = \sin x$

Вопрос 5. Выяснить какая из функций является четной:

Варианты ответов

1. $y = \frac{x}{\cos x} + \sin x$
2. $y = x^3 + tgx$
3. $y = x^3 \cdot tgx$

Вопрос 6. Укажите верное утверждение для функции $y = \sin x$:

Варианты ответов

1. монотонная
2. четная
3. нечетная
4. общего вида

Вопрос 7. График четной функции симметричен относительно:

Варианты ответов

1. начала координат
2. оси абсцисс
3. оси ординат

Вопрос 8. Выяснить, чему равен $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$

Варианты ответов
1. -1
2. не существует
3. 1
4. бесконечность

Вопрос 9. Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно малые при $x \to 0$

1) $y=\frac{1}{x}$, 2) $y=x^{10}$, 3) $y=sin\frac{x}{3}$, 4) $y=cos2x$, 5) $y=\frac{1}{cos3x}$.

Варианты ответов
1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)
5. 5)

Вопрос 10. Выяснить, какая из перечисленных функций не является бесконечно большой при $x \to \infty$

1) $y=\sqrt[9]{x}$; 2) $y=tgx$; 3) $y=log_{0,5}\,x$; 4) $y=\frac{1}{x^{-2}}$;

Варианты ответов
1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)

Вопрос 11. Произведение двух бесконечно малых и бесконечно большой величин являются

Варианты ответов
1. Бесконечно малой величиной
2. Бесконечно большой величиной
3. Неопределенностью.

Вопрос 12. Выяснить, какие из перечисленных функций непрерывны в точке x=0

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\sqrt{x}$; 3) $y=\begin{cases}1,\ при\ x\le 0\\ x,\ при\ x>0\end{cases}$; 4) $y=\begin{cases}-x,\ при\ x<0\\ 0,\ при\ x=0\\ x,\ при\ x>0\end{cases}$; 5) $y=tg\,x$

Варианты ответов
1. 1)
2. 2)
3. 3)
4. 4)
5. 5)

Вопрос 13. Какого рода точка разрыва функции $y = \frac{1}{x-2}$

1. второго рода
2. первого рода

Вопрос 14. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x - 10}{2x^2 + 7x + 5}$

Варианты ответов
1. 1,5
2. ∞
3. 0

Вопрос 15. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \right)^{x^2}$

Варианты ответов
1 e^2
2. e^{-2}
3. ∞
4. 0

Вопрос 16. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - x}$

Варианты ответов
1. + ∞
2. - ∞
3. 0

Вопрос 17. Найти α, если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^4 + 3x^2 - 18}{\alpha x^4 - 18x^2 + 3} = \frac{1}{2}$

Варианты ответов
1. 1
2. 10
3. 25

Вопрос 18. Найти α, если $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg \alpha x}{sin 8x} = 2$

Варианты ответов
1. 16
2. 4
3. 2

Вопрос 19. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$

Варианты ответов
1. 6
2. 0
3. ∞

Вопрос 20. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$

Варианты ответов

1. 2
2. 0
3. -2

Вопрос 21. Чему равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

Варианты ответов

1. $\frac{3}{5}$
2. 1
3. $\frac{5}{3}$

Вопрос 22. Какая формула не является вторым замечательным пределом?

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$,2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Вопрос 23. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x,$ найти f′(0), f′(1), f′(-1)

Варианты ответов

1. 0, 0, 0
2. 1, 4, 0
3. 1, 0, 4
4. 4, 1, 0

Вопрос 24. Найти производную функции $y = x \cdot arctgx$, в точке $x_0 = 0$

Варианты ответов

1. 0
2. 1
3. -1
4. ∞

Вопрос 25. Найти уравнение касательной к кривой $y = e^x$ в точке $x_0 = 0$

Варианты ответов

1. y = x
2. y = x – 1
3. y = –x + 1
4. y = x + 1

Вопрос 26. Найти уравнение нормали к кривой $y = e^x$ в точке $x_0 = 0$

Варианты ответов

1. y = x
2. y = x – 1
3. y = –x + 1
4. y = x + 1

Вопрос 27. $y = \ln^2 x,$ найти y''

Варианты ответов

1. $\dfrac{2}{x^2}$
2. $-\dfrac{\ln x}{x^2}$
3. $\ln x$
4. $\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

Вопрос 28. $x^2 + y^2 = 4.$ Найти y' в точке $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$

Варианты ответов

1. 1
2. -1
3. 0
4. $\propto$

Вопрос 29. Дифференциал функции $y = 2^{-x^2}$ равен

Варианты ответов

1. $-x^2 2^{-x^2-1} \ln x dx$
2. $-2x2^{-x^2} \ln x dx$
3. $-x^2 2^{-x^2} \ln x dx$

Вопрос 30. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^3 + 2x$ в точке x_0=1, если известно Δx = 0,01.

Варианты ответов

1. Δy = 0,050301 dy = 0,05
2. Δy = 0,05 dy = 0,05
3. Δy = 0,055 dy = 0,04
4. Δy = 0,06 dy = 0,04

Вопрос 31. Вычислить приближенно tg 44°

Варианты ответов

1. 0,995
2. 0,985
3. 0,975
4. 0,965

Вопрос 32. $y = 4x^5 - 7x^2 + 3,$ найти $d^2 y$

Варианты ответов

1. $(80x^3 - 14)(dx)^2$
2. $80x^3 (dx)^2$
3. $(80x^2 - 14x)(dx)^2$

Вопрос 33. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$

Варианты ответов

1. 1
2. $1\dfrac{4}{9}$
3. 2
4. 1,6

Вопрос 34. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{Sinx}$

Варианты ответов

1. 1
2. 0
3. -1
4. $\propto$

Вопрос 35. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{Sinx})$

Варианты ответов

1. 1
2. 0
3. -1
4. $\propto$

Вопрос 36. Выяснить какое из приведенных утверждений является неверным:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю или не существует;
2) в точке экстремума функция меняет знак;
3) в точке экстремума производная меняет знак;
4) в точке, в которой производная равна нулю или не существует, может не быть экстремума.

Варианты ответов

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Вопрос 37. Среди перечисленных функций горизонтальную асимптоту имеет функция: 1) $y=3^x-2^x$; 2) $y=xe^{-x}$.

Варианты ответов

1. 1
2. обе функции имеют
3. 2
4. обе функции не имеют

Вопрос 38. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+x^2$ на отрезке $[-1;2]$.

Варианты ответов
1. $f_{наиб.}(2) = 12; f_{наим.}(-1) = f_{наим.}(0) = 0$
2. $f_{наиб.}(1) = 4;\ \ f_{наим.}(0) = 0$
3. $f_{наиб.}(0) = 5;\ \ f_{наим.}(-1) = -5$

Вопрос 39. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x + e^{-x}$

Варианты ответов
1. возрастает при $x>0$, убывает при $x<0$
2. функция только возрастает
3. функция только убывает
4. возрастает при $x < 0$, убывает при $x > 0$

Вопрос 40. Следующее утверждение из перечисленных является всегда верным:
1) в точке перегиба всегда существует конечная 1-я производная;
2) в точке перегиба всегда существует конечная 2-я производная;
3) точка перегиба является точкой экстремума 1-й производной дважды дифференцируемой функции;
4) точка перегиба является точкой экстремума 2-й производной функции.

Варианты ответов
1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Вопрос 41. При каких a и $в$ функция $F(x) = \frac{a}{3}x^b + 2x^2 + x + 1$ является первообразной для $f(x) = (2x+1)^2$?

Варианты ответов
1. $a = 3 \quad в = 4$
2. $a = 4 \quad в = 3$
3. $a = 3 \quad в = 3$
4. $a = 4 \quad в = 4$

Вопрос 42. Найти интеграл $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$

Варианты ответов
1. $-0{,}5e^{1-2x} + C$
2. $-0{,}5e^{2x-1} + C$
3. $0{,}5e^{2x} + C$
4. $-0{,}5e^{2x} + 1 + C$

Вопрос 43. Найти интеграл $\int x \ln x dx$

Варианты ответов
1. $\frac{x^2}{2} \ln x + C$

2. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

3. $-\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

4. $\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$

Вопрос 44. При каких значениях параметров *а* и *в* справедливо равенство

$\int_0^1 x\sqrt{e^{x^2+1}}dx = e^a - \sqrt{e^b}$?

Варианты ответов

1. $a=0 \quad в=0$
2. $a=1 \quad в=1$
3. $a=2 \quad в=2$
4. $a=0 \quad в=1$

Вопрос 45. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} e^x Sinxdx$

Варианты ответов

1. $-0{,}5(e^{\pi}-1)$
2. $0{,}5(e^{\pi}-1)$
3. $0{,}5(e^{\pi}+1)$
4. $-0{,}5(e^{\pi}+1)$

Вопрос 46. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

Варианты ответов

1. 2ln2 – 1
2. 1 – 2ln2
3. 2
4. ln2 + 1

Вопрос 47. Площадь фигуры, ограниченная линиями $y=x^3$, $y=-2x^2+3x$ (фигура расположена в 1-ой четверти)

Варианты ответов

1. 1; 2. 0,5; 37/12; 4.5/8

Вопрос 48. При каком минимальном значении *n* формула трапеций обеспечивает вычисление интеграла $\int_1^5 \ln xdx$ с точностью до 0,001?

Варианты ответов: 1.74; 2.65; 3. 86; 4.48

Вопрос 49. Вычислить несобственный интеграл 1-го рода $\int_0^{\infty} e^{-x} Sinxdx$

Варианты ответов
1. 1
2. 2
3. 0,25
4. 0,5

Вопрос 50. Вычислить несобственный интеграл 2-го рода $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Варианты ответов
1. π/4
2. π/2
3. π; 4.3π/2

Вопросы для подготовки к экзамену за первый семестр «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

1. Метод координат на плоскости. Основные задачи, решаемые методом координат.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой.
3. Уравнение прямой в отрезках. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку; через две данные точки.
5. Расстояние от точки до прямой.
6. Окружность. Уравнение окружности.
7. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса.
8. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты и эксцентриситет гиперболы.
9. Парабола. Каноническое уравнение параболы.
10. Линейные операции над векторами и их свойства.
11. Линейная зависимость векторов на плоскости.
12. Проекция вектора на ось и ее свойства.
13. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Разложение вектора по ортам координатных осей.
14. Действия над векторами, заданными проекциями. Координаты точки. Координаты вектора.
15. Скалярное произведение векторов и его свойства.
16. Векторное произведение векторов и его свойства.
17. Смешанное произведение векторов и его свойства.
18. Действия над матрицами.
19. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы.
20. Ранг матрицы.
21. Матричные уравнения.
22. Определители второго и третьего порядка. Свойства определителей.
23. Понятие минора и алгебраического дополнения. Разложение определителя по элементам ряда.

24. Выражение векторного и смешанного произведений векторов через координаты сомножителей.
25. Невырожденные матрицы. Обратная матрица. Алгоритм ее нахождения.
26. Система линейных уравнений (СЛУ). Основные понятия. Решение СЛУ матричным способом.
27. Формулы Крамера.
28. Метод Гаусса решения СЛУ.
29. Теорема Кронекера-Капели.
30. Понятие *n*- мерного векторного пространства.
31. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
32. Квадратичные формы. Приведение канонической формы к каноническому виду.
33. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
34. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
35. Уравнение плоскости в отрезках.
36. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.
37. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
38. Расстояние от точки до плоскости.
39. Векторное и параметрическое уравнение прямой в пространстве.
40. Канонические уравнения прямой.
41. Общее уравнение прямой. Переход к каноническим уравнениям.
42. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямой в пространстве.
43. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.
44. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
45. Пересечение прямой с плоскостью.
46. Условие принадлежности прямой плоскости.
47. Цилиндрические поверхности.
48. Поверхности вращения. Конические поверхности.

Вопросы для подготовки к экзамену за второй семестр «Основы математического анализа»

1. Понятие множества. Множества конечные и бесконечные. Действия с множествами.
2. Выпуклые множества и их свойства.
3. Абсолютная величина действительного числа. Свойства абсолютных величин.
4. Числовая ось. Числовые промежутки. Окрестность точки.
5. Определение функции. Область существования функции. Способы задания функции. Классификация функций.

6. Числовая последовательность. Ограниченные, неограниченные, монотонные последовательности. Предел последовательности.
7. Предел функции. Бесконечно малые функции, их свойства.
8. Теорема о единственности предела функции.
9. Признак существования предела функции.
10. Вывод 1-го замечательного предела.
11. Второй замечательный предел, разные формы второго замечательного предела.
12. Определение непрерывности функции в точке на языке «$\varepsilon - \delta$». Определение непрерывности функции в точке на языке приращений.
13. Точки разрыва функции. Их классификация.
14. Сравнение бесконечно малых функций.
15. Производная. Геометрический смысл производной.
16. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции.
17. Правила дифференцирования функции.
18. Производная сложной и обратной функций.
19. Производные основных элементарных функций.
20. Дифференцирование неявных функций.
21. Производные высших порядков.
22. Уравнение касательной и нормали к кривой
23. Понятие дифференциала функции.
24. Геометрический смысл дифференциала функции.
25. Основные теоремы о дифференциалах.
26. Дифференциалы высших порядков.
27. Применения дифференциалов к приближенным вычислениям.
28. Теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Роля, Лагранжа и их геометрический смысл).
29. Правила Лопиталя.
30. Возрастание и убывание функций.
31. Максимум и минимум функций.
32. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
33. Выпуклость и вогнутость кривой; точки перегиба.
34. Асимптоты графика функции.
35. Правила построения графика функции.
36. Формула Тейлора.
37. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенных интегралов.
38. Основные методы интегрирования (неопределенный интеграл).
39. Интегрирование рациональных дробей.
40. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
41. Геометрический смысл определенного интеграла.
42. Формула Ньютона-Лейбница.
43. Основные свойства определенных интегралов.
44. Методы вычисления определенных интегралов.
45. Приложение определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур.

46. Приближенное вычисление определенного интеграла.
47. Несобственные интегралы 1-го рода.
48. Несобственные интегралы 2-го рода.
49. Числовые ряды. Основные понятия.
50. Определение и свойства степенного ряда.
51. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.
52. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
53. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
54. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
55. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
56. Дифференцируемость и полный дифференциал функции нескольких переменных.
57. Частные производные.
58. Экстремум функции нескольких переменных.
59. Определение комплексных чисел, их геометрическое изображение и формы записи.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Высшая математика для экономистов. Под. ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002.
2. Высшая математика для экономистов. Практикум. 2-е издание. Под. ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
3. Курс высшей математики. В.С. Шипачев. – М.: Изд-во Оникс, 2007.
4. Конспект лекций по высшей математике. Части 1. Письменный Д.Т. – М.: Айрис пресс, 2002.
5. Конспект лекций по высшей математике. Части 2. Письменный Д.Т. – М.: Айрис пресс, 2002.
6. Практикум по высшей математике. Каплан И.А., Пустынников В.И. – М:2006.
7. Математика. Для экономических специальностей ВУЗов, часть I. Под ред. Р.Ш. Марданова. – Казань: Изд-во КЭФИ, 2000.
8. Сборник задач по высшей математике. В.С. Щипачев. – М.: «Высшая школа», 2006.
9. Высшая математика / Баврин И.И. – М.: 2007.
10. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис пресс, 2003.
11. Математический анализ / Шипачев В.С. – М.: Высшая школа, 2002.
12. Высшая математика / Гусак А.А. – Минск: 2007.
13. Аналитическая геометрия и линейная алгебра (справочное пособие к решению задач) / Гусак А.А. – Минск: 2001.
14. Математический анализ и дифференциальные уравнения (справочное пособие к решению задач) / Гусак А.А. – Минск: 2003.
15. Математика. Для экономических специальностей Вузов. Часть 2. Под. ред. Р.Ш. Марданова. – Казань: Издательство КФЭИ, 2001.
16. Высшая математика. Виленкин И.В., Гробер В.М. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 2002.
17. Практикум по высшей математике. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 2004.
18. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Оникс. 2002.
19. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2..Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Оникс. 2002.

Дополнительная:

1. Математика для экономических специальностей / Красс М.С. – М.: Дело, 2003.
2. Высшая математика / Ильин В.А., Куркина А.В. – М.: Проспект, 2002.
3. Математика. Высшее образование / Барашков А.С. – М.: Филол. о-во СЛОВО, Изд-во Эксмо, 2005.

4. Краткий курс высшей математики. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. – М.: Изд-во Астрель, 2001.
5. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Ильин В.А., Ким Т.Д. – М.: Изд-во МГУ, 2008.
6. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 1997.
7. Высшая математика для экономистов (курс лекций) / Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. – М.: Экзамен, 2006.
8. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики. Под ред. А.И. Карасева, Н.Ш. Кремера. – М.: Экономическое образование,1989.
9. Сборник задач и упражнений по высшей математике / Булдык Г.М. – Минск: ООО Юнипресс, 2002.